الجديد في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

الجزء 1

دروس وتطبيقات



تأليف : أ. حمزة

الدرس 1

المُتَتَالِيَاتُ التراجِعِيَةُ والبرهانُ بِالتراجُعِ

1 - عموميات حول المتتاليات

1 - 1 تعريف

المتتالية هي دالة U معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

اصطلاحات :

نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالرمز U_n بدلا من $U(n)$.
- نرمز إلى المتتالية بالرمز (U_n) بدلا من U
- U_n يدعى الحد العام للمتتالية (U_n) أو الحد ذو الدليل n

ملاحظة

هناك طريقتان لتوليد متتالية .
1) تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام .
2) تعيين متتالية بعلاقة تراجعية .

مثال - ◆

(U_n) ، (V_n) ، (W_n) ثلاث متتاليات معرفة بـ :

$U_n = (-\frac{1}{2})^n$ ، $V_n = g(n)$ حيث $g: x \mapsto x^2+1$ و $W_{n+1} = 3W_n - 1$ مع $W_0 = 2$

- المتتاليتان (U_n) و (V_n) معرفتان بحديهما العام وأما المتتالية (W_n) فهي تراجعية.

1 - 2 اتجاه تغير متتالية

- القول أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \rangle U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \langle U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) ثابتة يعني أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة او المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة
$U_{n+1} \rangle U_n$ بـ $U_{n+1} \geq U_n$ (المتباينة $U_{n+1} \langle U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$)

مثال - ◆

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة $U_n = 3n+5$

و منه الحد U_{n+1} معرف بـ $U_{n+1} = 3(n+1)+5 = 3n+8 = U_n + 3$

بما ان $3 \rangle 0$ فإن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

1 - 3 المتتالية الحسابية

- القول ان المتتالية (U_n) حسابية يعني انه يوجد عدد حقيقي r بحيث من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = U_n + r$ ، يدعى r اساس المتتالية (U_n)
- من اجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m = U_P + (m-p)r$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

- إذا كان $S = P + \ldots\ldots + d$ هو مجموع m حد لمتتابعة من متتالية حسابية فإن:

$$S = \frac{m}{2}(P+d)$$

مثال - ◆

ليكن S مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية $1, 2, \ldots\ldots, n$

لاحظ أن S هو مجموع n حد اول لمتعاقبة من متتالية حسابية حدها الأول 1

وحدها الأخير n و اساسها $r = 1$ و منه فإن $S = \frac{n}{2}(1+n)$

1 - 4 المتتالية الهندسية

- القول ان (U_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = q \times U_n$ ، ويدعى q اساس المتتالية (U_n)
- من اجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m = U_p \times q^{m-p}$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

إذا كان $S = p + \ldots\ldots + d$ هو مجموع m حد المتتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول p و اساسها q فإن $S = p \times \frac{1-q^m}{1-q}$ حيث $(q \neq 1)$

مثال - ◆

S مجموع الأعداد الحقيقية المعرف بـ $S = 1 + q + \ldots\ldots + q^{n-1}$

S عبارة عن مجموع n حد أول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1

و أساسها q إذن $S = \frac{1-q^n}{1-q}$

تمرين تدريبي ❶

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام U_n

2) نفرض أن $U_n \neq 0$ و نضع $V_n = \frac{1}{U_n}$

أ- بين ان المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعين حدها الأول و أساسها .

ب- استنتج عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

✓ الحل :

1) $U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{2}$ ، $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{1}{3}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{U_2+1} = \frac{1}{4}$ ، $U_4 = \frac{U_3}{U_3+1} = \frac{1}{5}$ ،

$U_5 = \frac{U_4}{U_4+1} = \frac{1}{6}$

نلاحظ ان الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل $U_n = \frac{1}{n+1}$

2) أ) حتى تكون (V_n) حسابية يجب ان يوجد عدد حقيقي r بحيث من اجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} - V_n = r$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = 1$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية اساسها $r=1$ و حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

ب) عبارة الحد العام V_n هي $V_n = V_0 + n \times r$ بالتعويض نجد :

$V_n = 1+n$ و منه $U_n = \frac{1}{1+n}$

تمرين تدريبي ❷

- عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 مع العلم ان $U_1 \times U_5 = 25$ و $U_2+U_3+U_4 = \frac{35}{2}$

✓ الحل :

$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = (U_1 \times r^2)^2 = (U_3)^2$

و بما ان $U_1 \times U_5 = 25$ فإن $U_3 = 5$

المساواة $U_2+U_3+U_4 = \frac{35}{2}$ تصبح $U_2+U_4 = \frac{25}{2}$

بما ان U_3 الوسط الهندسي لـ U_2 و U_4 فإن $U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$

إذن $\begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases}$ (I)

بعد حل الجملة (I) نجد $U_1 = \frac{5}{4}$ ، $U_2 = \frac{5}{2}$ ، $U_3 = 5$ ، $U_4 = 10$ ، $U_5 = 20$

❷ -البرهان بالتراجع

2 - 1 أهمية البرهان بالتراجع

في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي n مثلا

$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نرمز إلى هذه الخاصية بـ P_n .

- نستطيع القول ان P_1 صحيحة لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

P_2 صحيحة لأن $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$

P_3 صحيحة لأن $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

لكن هل P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه من العلم انه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية IN غير منتهية البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية P_n من اجل كل $n \geq 1$ و بالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

2 - 2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على أن الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نتبع خطوتين اساسيتين هما :

1) نتحقق أن P_{n_0} صحيحة .

2) نفرض أن الخاصية P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي و على هذا الفرض نبين أن الخاصية P_{n+1} صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

ملاحظة

- الفرضية " P_n صحيحة " تسمى فرضية التراجع

تمرين تدريبي ❶

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من أو يساوي 1 يكون :

$1^2+2^2+3^2+ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

✓ الحل :

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي P_n الخاصية

$1^2+2^2+3^2+ +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- P_1 صحيحة لأن $1^2 = 1$ و $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n و نبرهن صحة P_{n+1} اي:

$1^2+2^2+3^2+ +(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

لأن $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

إذن الخاصية P_{n+1} صحيحة و عليه فان الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

تمرين تدريبي ❷

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9

✓ الحل

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية " العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9 "

- بما ان $10^0-1=0$ و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن P_0 صحيحة .

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ اي $10^n-1=9k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $10^{n+1}-1=9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$10^{n+1}-1 = 10^n \times 10-1 = 10^n(1+9)-1 = (10^n-1)+9\times 10^n$$
$$= 9k+9\times 10^n = 9\left(k+10^n\right) = 9k'$$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

تمرين تدريبي ❸

برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $n < 2^n$.

✓ الحل :

- P_1 صحيحة لأن $1 < 2^1$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي $n \geq 1$ اي $n < 2^n$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة

اي $n+1 < 2^{n+1}$.

بضرب طرفي المتباينة $n < 2^n$ بالعدد 2 نجد $2n < 2^{n+1}$... (1)

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $2n \geq n+1$... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $n+1 < 2^{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فان الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .



تطبيقات نموذجية

تطبيق . ❶ دراسة اتجاه تغير متتالية

- ما هي المتتاليات الرتيبة من بين المتتاليات المعطاة ؟

أ) $U_n=3n+5$ ، ب) $U_n=n!$ ، ج) $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}-n$

د) $U_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+4$ و $U_0=7$

✓ الحل :

لمعرفة اتجاه تغير متتالية نعين إشارة المقدار $U_{n+1}-U_n$

أ) $U_{n+1}-U_n=[3(n+1)+5]-(3n+5)=3$

بما أن من كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1}-U_n > 0$ فان (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) $n! = n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1$ مع $n \geq 1$

$$U_{n+1}-U_n = (n+1)\,n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1 - n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1$$
$$= (n!)\times n = n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1\,[n+1-1]$$

بما أن $n! > 0$ و $n \geq 1$ فان $(n!)\times n > 0$ و بالتالي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

ج) $U_{n+1}-U_n=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}-n-1\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}-n\right]=\frac{1}{2^{n+1}}-1$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $2^{n+1} > 2^0$ بقلب طرفي المتباينة نجد $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$

و بطرح 1 من طرفي هذه الأخيرة نجد $\frac{1}{2^{n+1}}-1 < 0$ اي $U_{n+1}-U_n < 0$

بالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

د) $U_{n+1}-U_n = \frac{3}{5}U_n+4-U_n = -\frac{2}{5}U_n+4 = -\frac{2}{5}(U_n-10)$

لمعرفة إشارة $U_{n+1}-U_n$ لابد من معرفة إشارة U_n-10 .

من أجل $n=0$ نجد $U_0-10 < 0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n > 0$ صحيحة من أجل $n=0$.

هل الخاصية $U_n-10 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي ؟ للإجابة عن ذلك

نستعمل البرهان بالتراجع :

نسمي P_n الخاصية $U_n-10 < 0$

- P_0 صحيحة لأن $U_0-10 < 0$

- نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n-10\rangle 0$ ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}-10\rangle 0$

$$U_{n+1}-10 = \frac{3}{5}U_n+4-10 = \frac{3}{5}U_n-6 = \frac{3}{5}(U_n-10)$$

بما أن $U_n-10\rangle 0$ فإن $\frac{3}{5}(U_n-10)\rangle 0$ و عليه فإن $U_{n+1}-10\rangle 0$ إذن P_{n+1} صحيحة

و بالتالي الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي و عليه فالمتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تطبيق . 2 دراسة رتابة متتالية

نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المتتاليتين (U_n) و (V_n) كما يلي :

$U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ و $V_n = U_{2n}-U_n$

برهن أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

✓ الحل :

لكي تكون المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ يجب أن يكون $V_{n+1}-V_n\rangle 0$ من اجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1}-V_n = (U_{2n+2}-U_{n+1})-(U_{2n}-U_n) = (U_{2n+2}-U_{2n})-(U_{n+1}-U_n)$$

$$=\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

بما أن $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}\rangle 0$ فإن $V_{n+1}-V_n\rangle 0$ و بالتالي المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

تطبيق . 3 حساب مجموع متتالية هندسية

(U_n) متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول $U_1=-2$.

1) عبر عن U_n بدلالة n

2) احسب $U_1+U_2+\ldots+U_7$

3) لتكن (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n=U_{2n}$ احسب المجموع $V_1+V_2+\ldots+V_n$ بدلالة n.

✓ الحل

1) $U_n=U_1\times q^{n-1}$ حيث q هو الأساس و U_1 الحد الأول

بتعويض قيمة q و U_1 في عبارة U_n نجد $U_n=-2\times 5^{n-1}$

2) $U_1+U_2+\ldots+U_7 = U_1\times\frac{1-q^7}{1-q} = -2\times\frac{1-5^7}{1-5} = \frac{1-5^7}{2}$

3) $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \frac{-2\times 5^{2n+2-1}}{-2\times 5^{2n-1}} = 5^2 = 25$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q'=q^2$ و حدها الأول $V_1=U_2$ و منه

$$V_1+V_2+\ldots+V_n = V_1\times\frac{1-q'^n}{1-q'} = U_2\times\frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = U_2\times\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$$

$$= -10\times\frac{1-5^{2n}}{1-25} = \frac{5}{12}\left(1-5^{2n}\right)$$

تطبيق . 4 تعيين أساس متتالية هندسية

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحيث من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم :

$\sum_{P=1}^{n} U_P = \frac{3^n-1}{2}$

1) احسب $U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9$

2) بين ان (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول U_1.

✓ الحل :

1) $S_1=U_1+U_2+U_3 = \frac{3^3-1}{2} = 13$

$S_2=U_1+U_2+\ldots+U_9 = \frac{3^9-1}{2} = 9841$

$S_2-S_1 = U_4+U_5+\ldots+U_9 = 9841-13 = 9828$

2) $U_1+U_2+\ldots+U_{n-1} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$ (1)

$U_1+U_2+\ldots+U_n = \frac{3^n-1}{2}$ (2)

بطرح طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $U_n = \frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{3^n}{2}-\frac{3^{n-1}}{2} = 3^{n-1}$

بما ان (U_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ فان حدها الأول هو $U_1=3^{1-1}=1$ و اساسها $r=3$.

تطبيق . 5 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:
$U_1=1$ و $U_2=3$ و $U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n$
1) من اجل $n\geq 1$ نضع $V_n=U_{n+1}-U_n$
أ) ما هي طبيعة المتتالية (V_n) ؟
ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n .
2) بين بالتراجع أن $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$ ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

✓ الحل :

1) أ) $V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=3U_{n+1}-2U_n-U_{n+1}$
$=2U_{n+1}-2U_n=2(U_{n+1}-U_n)=2V_n$
ومنه (V_n) متتالية هندسية اساسها $q=2$ و حدها الأول $V_1=U_2-U_1=2$
ب) $V_n=V_1\times q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

2) نسمي P_n الخاصية $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$

P_1 صحيحة لأن $U_2-U_1=3-1=2$ و $\sum_{r=1}^{1}V_r=V_1=2$

• نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $U_{n+1}-U_1=\sum_{r=1}^{n}V_r$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $U_{n+2}-U_1=\sum_{r=1}^{n+1}V_r$

$U_{n+2}-U_1=3U_{n+1}-2U_n-U_1=2(U_{n+1}-U_n)+U_{n+1}-U_1$
$=2V_n+\sum_{r=1}^{n}V_r=V_{n+1}+\sum_{r=1}^{n}V_r=\sum_{r=1}^{n+1}V_r$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

- لدينا $U_n-U_1=\sum_{r=1}^{n-1}V_r$

و منه $U_n=U_1+\sum_{r=1}^{n-1}V_r$

$U_n=U_1+V_1\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=1+2\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=-1+2^n$

تطبيق . 6 تعيين أساس متتالية هندسية

نعتبر (U_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من اجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي الواحد بالعلاقة $U_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}U_n$ و $U_1=a$ مع a عدد حقيقي معطى . و لتكن (V_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل طبيعي $n\geq 1$ بـ $V_n=13U_n-4$
1) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها k
2) اكتب V_n بدلالة n و a ثم استنتج U_n بدلالة n و a

✓ الحل :

1) $V_{n+1}=13U_{n+1}-4=13\times\frac{4}{10}-13\frac{\times 3}{10}U_n-4=\frac{26}{5}-\frac{39}{10}\left(\frac{V_n+4}{13}\right)-4$
$=\frac{26}{5}-\frac{3}{10}(V_n+4)-4=\frac{26}{5}-\frac{12}{10}-\frac{3}{10}V_n-4=-\frac{3}{4}V_n$
إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $k=\frac{-3}{10}$ و حدها الأول $V_1=13U_1-4=13a-4$

2) $V_n=V_1\times k^{n-1}=(13a-4)\times\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$

$U_n=\frac{V_n+4}{13}=\frac{(13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}+4}{13}$

تطبيق . 7 متتالية كثير حدود . المتتالية الهندسية

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=a$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n^2+n$(1)
1) أوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ بحيث المتتالية (a_n) ذات الحد العام $a_n=P(n)$ تحقق العلاقة (1)
2) بين أن المتتالية (V_n) ذات الحد العام $V_n=U_n-a_n$ هندسية.
3) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n و a

✓ الحل :

1) $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\delta$ حيث $\alpha=0$

إذن $a_n=\alpha n^2+\beta n+\delta$ (a_n) تحقق العلاقة (1) وهذا معناه أن :

$$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\delta=\frac{1}{2}\alpha n^2+\frac{1}{2}\beta n+\frac{1}{2}\delta+n^2+n$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$\left(\frac{1}{2}\alpha-1\right)n^2+\left(2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1\right)n+\alpha+\beta+\delta-\frac{1}{2}\delta=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

المساواة (2) محققة من أجل كل عدد طبيعي إذا فقط إذا كان :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-1=0\\ 2\alpha+\frac{1}{2}\beta-1=0\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\delta=0\end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نجد $\alpha=0$ و $\beta=-6$ و $\delta=8$

إذن $P(x)=2x^2-6x+8$

2) $V_{n+1}=U_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n^2+n-2(n+1)^2+6(n+1)-8$

$=\frac{1}{2}(U_n-2n^2+6n-8)=\frac{1}{2}\left[U_n-\left(2n^2-6n+8\right)\right]$

$=\frac{1}{2}(U_n-a_n)=\frac{1}{2}V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=U_0-a_0=a-8$

3) $V_n=V_0\times q^n=(a-8)(\frac{1}{2})^n$

$U_n=V_n+a_n=(a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n^2-6n+8$

تطبيق . 8 تعيين ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$a\ b\ c=64$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث a , b , c

و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{8}$ عين الأعداد الحقيقية a , b , c

✓ الحل :

بما أن a , b , c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فان $ac=b^2$

$$\begin{cases}abc=64\\ ac=b^2\end{cases}\ \text{يكافئ}\ \begin{cases}b^3=64\\ ac=b^2\end{cases}\ \text{يكافئ}\ \begin{cases}b=4\\ ac=16\end{cases}$$

بتعويض قيمة b في المساواة $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ نجد $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$

إذن (1) $\begin{cases}ac=16\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}\end{cases}$

(1) تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{1}{a}+\frac{a}{16}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{16a}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ

تكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ \frac{16+a^2}{2a}=5\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\ a^2-10a+16=0\end{cases}$

$a^2-10a+16=0$

$\Delta'=25-(1)(16)=9$ و منه $a_1=8$ و $a_2=2$

$a=a_1$ يكافئ $c_1=\frac{16}{8}=2$ منه $(a,b,c)=(8,4,2)$

$a=a_2$ يكافئ $c_2=\frac{16}{2}=8$ منه $(a\ ,\ b\ ,\ c)=(2,4,8)$

تطبيق . 9 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$S_n=1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)$ و $T_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n=T_n$

✓ الحل :

نسمي P_n الخاصية " $S_n=T_n$ "

• P_1 صحيحة لأن $S_1=1\times 2=2$ و $T_1=\frac{1}{3}\times 1(1+1)(1+2)=2$

. نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $S_n=T_n$ و نبرهن صحة P_{n+1} أي

$S_{n+1}=T_{n+1}$

$S_{n+1}=1\times 2+2\times 3+\ldots+(n+1)(n+2)$

$=1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$

$=S_n+(n+1)(n+2)=T_n+(n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = T_{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 10 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية $3^n \geq (n+2)^2$

1) هل P_0 ، P_1 ، P_2 ، P_3 صحيحة ؟

2) بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: P_n صحيحة .

✓ الحل :

1) بما أن $3^0 = 1$ و $(0+2)^2 = 4$ فإن المتباينة $1 \geq 4$ خاطئة و بالتالي P_0 خاطئة .

- بما أن $3^1 = 3$ و $(1+2)^2 = 9$ و المتباينة $3 \geq 9$ خاطئة فإن P_1 خاطئة

- بما أن $3^2 = 9$ و $(2+2)^2 = 16$ و المتباينة $9 \geq 16$ خاطئة فان P_2 خاطئة

- بما أن $3^3 = 27$ و $(3+2)^2 = 25$ و المتباينة $27 \geq 25$ صحيحة و بالتالي P_3 صحيحة

2) P_3 صحيحة من السؤال 1.

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $3^n \geq (n+2)^2$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $3^{n+1} \geq (n+3)^2$.

بضرب المتباينة $3^n \geq (n+2)^2$ بالعدد 3 نجد $3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$... (1)

لكي تكون P_{n+1} صحيحة يجب أن يكون $3(n+2)^2 \geq (n+3)^2$ (2)

(2) تكافئ $3(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$ تكافئ $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{-6-\sqrt{12}}{4}$		$\frac{-6+\sqrt{12}}{4}$		$+\infty$
$2x^2+6x+3$		+	0	-	0	+	

من الجدول نستنتج ان $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$ من اجل كل عدد طبيعي و بالتالي المتباينة (2) صحيحة إذن من (1) و (2) نستنتج ان $3^{n+1} \geq (n+3)^2$ و عليه فالخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

تطبيق . 11 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة

نضع $n ! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ حيث $n \geq 1$ و يقرأ " عاملي n "

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n ! \geq 2^{n-1}$

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $n ! \geq 2^{n-1}$ "

- P_1 صحيحة لأن $1 ! = 1$ و $2^{1-1} = 2^0 = 1$ و المتباينة $1 \geq 1$ صحيحة .

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $n ! \geq 2^{n-1}$

و نبرهن صحة P_{n+1} اي $(n+1) ! \geq 2^n$

بضرب طرفي المتباينة $n ! \geq 2^{n-1}$ بالعدد $(n+1)$ نجد $(n+1) \times (n!) \geq (n+1) 2^{n-1}$ لكن $(n+1)! = (n+1) \times (n!)$ و عليه المتباينة الأخيرة تصبح

$(n+1) ! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$ (1)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \geq 2$

بضرب طرفي المتباينة $n+1 \geq 2$ بالعدد 2^{n-1} نجد $(n+1) 2^{n-1} \geq 2^n$... (2)

من (1) و (2) نجد $(n+1) ! \geq 2^n$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي الخاصية P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 12 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6 ".

- P_0 صحيحة لأن $5^{0+1} - 5 = 0$ و الصفر يقبل القسمة على 6.

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $5^{2n+1} - 5 = 6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ و نبرهن صحة P_{n+1} اي $5^{2n+3} - 5 = 6\beta$ مع $\beta \in \mathbb{N}$

$5^{2n+3} - 5 = 5^{2n+1} \times 5^2 - 5 = 5^{2n+1}(24+1) - 5 = 5^{2n+1} - 5 + 24 \times 5^{2n+1}$

$= 6\alpha + 24 \times 5^{2n+1} = 6(\alpha + 4 \times 5^{2n+1}) = 6\beta$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

تطبيق - 13 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن على صحة الخاصية P_n : " $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 " من اجل كل عدد طبيعي n

✓ الحل

- P_0 صحيحة لأن $2^{0+2}+3^{0+1}=7$ و 7 مضاعف للعدد 7.
- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7
و نبرهن صحة P_{n+1} اي " $2^{n+3}+3^{2n+3}$ مضاعف للعدد 7 "

$$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2n+1}\times 3^2+2^{n+2}\times 2^1$$
$$=2^{2n+1}\times(7+2)+2^{n+2}\times 2$$
$$=7\times 3^{2n+1}+2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}=7\times 3^{2n+1}+2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)$$
$$=7\times 3^{2n+1}+2\times 7\alpha$$
$$=7\left(3^{2n+1}+2\alpha\right)=7\beta$$

إذن P_{n+1} صحيحة و منه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

تطبيق - 14 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

ليكن α و β عددين طبيعيين غير معدومين بحيث $\alpha\neq\beta$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $\alpha^n-\beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha-\beta$.

2) استنتج أن $6^{3n+3}-7^{n+1}$ يقبل القسمة على 209 .

✓ الحل

1) نسمي P_n الخاصية " $\alpha^n-\beta^n$ يقبل القسمة على $\alpha-\beta$ "

- P_0 صحيحة لأن $\alpha^0-\beta^0=0$ و 0 يقبل القسمة على $\alpha-\beta$
- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n اي $\alpha^n-\beta^n=\lambda(\alpha-\beta)$ و نبرهن صحة P_{n+1} اي $\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=\lambda'(\alpha-\beta)$

$$\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\beta\alpha^n-\beta\alpha^n=\left(\alpha^{n+1}-\beta\alpha^n\right)+\left(-\beta^{n+1}+\beta\alpha^n\right)$$
$$=\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta\left(\alpha^n-\beta^n\right)=\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta\times\lambda(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\left(\alpha^n+\beta\lambda\right)=(\alpha-\beta)\times\lambda'$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

2) $6^{3n+3}-7^{n+1}=\left(6^3\right)^{n+1}-7^{n+1}=216^{n+1}-7^{n+1}$

من السؤال(1) نستنتج ان $216^{n+1}-7^{n+1}$ يقبل القسمة على $216-7$ اي يقبل القسمة على 209 .

تطبيق - 15 البرهان بالتراجع و قابلية القسمة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $a\geq 1$ يكون العدد $a\left(a^{2n}-1\right)$ قابلا القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية $a\left(a^{2n}-1\right)$ يقبل القسمة على 6 .

نضع $\alpha_{(a,n)}=a\left(a^{2n}-1\right)$

1) من اجل $n=1$ يكون $\alpha_{(a,1)}=a\left(a^2-1\right)$

نبرهن بالتراجع أن العدد $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .

نسمي q_a الخاصية $\alpha_{(a,1)}$ يقبل القسمة على 6 .

- q_1 صحيحة لأن $\alpha_{(1,1)}=0$ و الصفر يقبل القسمة على 6 .
- نفرض أن q_a صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي أي $\alpha_{(a,1)}=6\lambda$ و نبرهن صحة q_{a+1} اي $\alpha_{(a+1,1)}=6\lambda'$

$$\alpha_{(a+1,1)}=(a+1)\left((a+1)^2-1\right)=(a+1)\left(a^2-1+2a+1\right)$$
$$=a\left(a^2-1\right)+\left(a^2-1\right)+(a+1)(2a+1)=6\lambda+(a+1)(3a)$$

لاحظ ان العدد $a(a+1)$ زوجي، وبالتالي فالعدد $3a(a+1)$ يقبل القسمة على 6 .

إذن $\left(\alpha_{a+1,1}\right)=6\lambda+6k=6(\lambda+k)=6\lambda'$

منه q_{a+1} صحيحة و بالتالي q_a صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

و عليه فإن P_1 صحيحة .

2) نفرض ان P_n صحيحة اي $a\left(a^{2n}-1\right)=6\beta$

و نبرهن صحة P_{n+1} صحيحة اي $a\left(a^{2n+2}-1\right)=6\beta'$

$$a\left(a^{2n+2}-1\right)=a\left[a^{2n+2}-1+a^2-a^2\right]$$
$$=a\left[a^2\left(a^{2n}-1\right)+\left(a^2-1\right)\right]$$
$$=a^2a\left(a^{2n}-1\right)+a\left(a^2-1\right)$$
$$=a^2\times 6\beta+6\lambda=6\left(a^2\beta+\lambda\right)=6\beta'$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ و من أجل كل $a\geq 1$.

تطبيق . 16 البرهان بالتراجع و إثبات متباينة مزدوجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$
1) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0\langle U_n\langle 2$
2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

✓ الحل

1) نسمي P_n الخاصية $0\langle U_n\langle 2$
- P_0 صحيحة لأن $0\langle U_0\langle 2$
- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $0\langle U_n\langle 2$
و نبرهن صحة P_{n+1} أي $0\langle U_{n+1}\langle 2$.
بإضافة 2 إلى حدود المتباينة $0\langle U_n\langle 2$ نتحصل على $2\langle 2+U_n\langle 4$
و بجذر حدود هذه الأخيرة نجد $0\langle\sqrt{2}\langle\sqrt{2+U_n}\langle 2$ اي $0\langle U_{n+1}\langle 2$
إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

2) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\dfrac{2+U_n-U_n^2}{\sqrt{2+U_n}+U_n}=\dfrac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$
بما أن $0\langle U_n\langle 2$ فإن $0\langle -U_n-1\langle -1$ و $U_n-2\langle 0$
و بالتالي $0\langle\dfrac{(U_n-2)(-U_n-1)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$
إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تطبيق . 17 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يوجد عددان طبيعيان a_n و b_n بحيث $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$

✓ الحل :

نسمي P_n الخاصية $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$
- P_1 صحيحة لأن $(2+\sqrt{3})^1=a_1+b_1\sqrt{3}$ حيث $a_1=2$ و $b_1=1$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي

$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\times\sqrt{3}$ ❶

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\times\sqrt{3}$.
بضرب طرفي المساواة (1) بالعدد $2+\sqrt{3}$ نجد:

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(a_n+b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(2a_n+3b_n)+\sqrt{3}(2b_n+a_n)$ ❷

بوضع $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ و $b_{n+1}=2b_n+a_n$
المساواة (2) تصبح :

$(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}$

و بما أن a_n و b_n عددان طبيعيان فإن a_{n+1} و b_{n+1} عددان طبيعيان .
إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 18 إثبات بالتراجع صحة تخمين

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_1=2$ و $U_{n+1}=\dfrac{2U_n-1}{U_n}$.
1) احسب U_2 , U_3 , U_4 ضع النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال
2) خمن نتيجة عبارة الحد العام U_n .
3) برهن بالتراجع صحة التخمين المحصل عليه

✓ الحل :

1) $U_2=\dfrac{2U_1-1}{U_1}=\dfrac{3}{2}$ و $U_3=\dfrac{2U_2-1}{U_2}=\dfrac{4}{3}$ و أيضا $U_4=\dfrac{2U_3-1}{U_3}=\dfrac{5}{4}$

2) نلاحظ أن البسط و المقام عددان طبيعيان متتابعان إذن يمكن كتابة $U_n=\dfrac{n+1}{n}$

3) نسمي P_n الخاصية $U_n=\dfrac{n+1}{n}$.

- P_1 صحيحة لأن $U_1=\dfrac{2}{1}=\dfrac{1+1}{1}$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي اي $U_n=\dfrac{n+1}{n}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n-1}{U_n} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right)-1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+2-n}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n}\times\frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

إذن P_{n+1} صحيحة و منه نستنتج أن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم

تطبيق . 19 تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة $\mathbb{N}$ بـ $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-3$

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 ، U_5 .

2) خمن عبارة الحد العام U_n ثم برهن على صحتها

3) بحساب U_n-3 من اجل كل $n\geq 0$ عبر عن U_n بدلالة n (طريقة ثانية)

✓ الحل

1) $U_1=2U_0-3=1$ ، $U_2=2U_1-3=-1$ ، $U_3=2U_2-3=-5$

$U_4=2U_3-3=-13$ ، $U_5=2U_4-3=-29$

2) يمكن كتابة

$U_1=-2^1+3$ ، $U_2=-2^2+3$ ، $U_3=-2^3+3$ ، $U_4=-2^4+3$

و $U_5=-2^5+3$

و بالتالي يمكن كتابة U_n على الشكل $U_n=-2^n+3$

- نسمي P_n الخاصية $U_n=-2^n+3$

- P_0 صحيحة لأن $U_0=2=-2^0+3$.

- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $U_n=-2^n+3$

و نبرهن صحة P_{n+1} اي $U_{n+1}=-2^{n+1}+3$.

$$U_{n+1} = 2U_n-3 = 2\left(-2^n+3\right)-3 = -2^{n+1}+3$$

منه P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

3) $U_0-3 = 2-3 = -1 = -2^0$

$U_1-3 = 1-3 = -2 = -2^1$

$U_2-3 = -1-3 = -4 = -2^2$

$U_3-3 = -5-3 = -8 = -2^3$

$U_4-3 = -13-3 = -16 = -2^4$

نلاحظ ان U_n-3 تكتب على الشكل :

-2^n اي $U_n=-2^n+3$ (يمكنك إثبات ذلك بالتراجع)

تطبيق . 20 تخمين عبارة حد عام لمتتالية و إثبات صحته بالتراجع

(Q_n) متتالية كثيرة حدود معرفة من اجل كل عدد حقيقي x بـ $Q_0(x)=1$

و من اجل كل عدد طبيعي n ومن اجل كل عدد حقيقي x لدينا

$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x+1)$

1) اوجد $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ و $Q_3(x)$ بدلالة x

2) خمن كتابة $Q_n(x)$ على شكل جداء عوامل.

3) برهن صحة هذا التخمين .

✓ الحل

1) $Q_1(x) = xQ_0(x+1) = x\times 1 = x$

$Q_2(x) = xQ_1(x+1) = x(1+x)$

$Q_3(x) = xQ_2(x+1) = x(1+x)(x+2)$

2) من عبارات $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ ، $Q_3(x)$ نستنتج انه يمكن كتابة

$Q_n(x) = (x+0)(x+1)\times(x+2)\ \ldots\ \times(x+n-1)$

3) نسمي P_n الخاصية " $Q_n(x) = x(x+1)\times\ \ldots\ \times(x+n-1)$ "

- P_1 صحيحة لأن $Q_1(x) = (x+0) = x$

- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي غير معدوم أي

$Q_n(x) = x(x+1)\times\ \ldots\ \times(x+n-1)$

و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي :

$Q_{n+1}(x) = x(x+1)\times\ \ldots\ \times(x+n)$

$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x+1) = x\times(x+1)(x+2)\times\ \ldots\ \times(x+1+n-1)$

$= x\times(x+1)(x+2)\times\ \ldots\ \times(x+n)$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق . 21 البرهان بالتراجع و إثبات المساواة

θ عدد حقيقي من المجال $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ

$U_0=2\cos\theta$ ومن اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$.

1) احسب U_1 و U_2 .

2) بين بالتراجع انه من اجل عدد طبيعي $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$

✓ الحل

1) $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2+(1+\cos\theta)}$

$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

بما ان $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ و بالتالي $\cos\frac{\theta}{2}>0$

إذن $U_1=2\cos\frac{\theta}{2}$

$U_2=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}$

2) نسمي P_n الخاصية $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$

P_0 صحيحة لأن $U_0=2\cos\theta=2\cos\frac{\theta}{2^0}$

- نفرض أن P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ و نبرهن صحة P_{n+1} أي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}=2\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$

بما ان $\frac{\theta}{2^{n+1}}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}>0$ و بالتالي $U_{n+1}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي .

تمارين و مسائل

1 - (V_n) متتالية معرفة بـ $V_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $V_{n+1}=3V_n-1$

احسب V_2 ثم عبر عن V_{n+2} بدلالة V_n .

2 - (U_n) متتالية عبارة حدها العام $U_n=\frac{n}{n^2+4}$.

عبر عن U_{n+1} ، U_{n-3} و U_{2n} بدلالة n.

3 - عين المتتالية الرتيبة من بين المتتاليات التالية :

1) $U_n=-2n+1$ 2) $U_n=\frac{n+2}{n+3}$

3) $U_n=n!$ 4) $U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

5) $U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{5}{6}U_n+2$.

4 - من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{-1}{n^2}$

ادرس رتابة المتتاليات التالية (U_n) ، (V_n) ، (U_n+V_n) ، $(U_n\times V_n)$

5 - نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=2$ و $U_1=4$ و $U_{n+1}=4U_n-U_{n-1}$

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث $\begin{cases}a+b=4\\ab=1\end{cases}$

2) (V_n) متتالية بحيث $V_n=U_{n+1}-aU_n$ مع $n\in\mathbb{N}$

بين ان (V_n) هندسية أساسها b.

3) (W_n) متتالية بحيث $W_n=U_{n+1}-bU_n$ مع $n\in\mathbb{N}$

بين ان المتتالية (W_n) هندسية أساسها a .

4) اعط عبارة صريحة لـ V_n و W_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

6 - a ، b ، c ثلاثة اعداد حقيقية مختلفة و $a\neq 0$ ، بحيث a ، b ، c بهذا الترتيب

حدود متتابعة من متتالية هندسية اساسها q و $3a$ ، $2b$ ، c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية. احسب q .

7 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وبحيث انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $\sum_{P=1}^{n} U_P = 2n^2+7n$ بين ان (U_n) متتالية حسابية معينا أساسها .

8 - (U_n) متتالية معرفة بـ U_0 و علاقة تراجعية $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+3U_n}$

1) احسب الأربعة الحدود الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج مقلوب كل منها ماذا تلاحظ؟

2) باستعمال المتتالية (V_n) حيث $V_n=\frac{1}{U_n}$ اوجد عبارة U_n بدلالة n .

9 - نريد حفر بئر تكلفة المتر الأول هي $1000\ DA$ و كلما تعمقنا في الحفر تزداد تكلفة المتر الواحد بمقدار ثابت هو $1500\ DA$.

1) ما هي تكلفة البئر إذا حفرنا 30 متر؟

2) ما هو العمق الذي نصل إليه إذا كانت لدينا ميزانية $16000\ DA$ ؟

10 - (U_n) متتالية هندسية بحيث $U_1+U_2+U_3=465$ ، $U_1\times U_2\times U_3=421875$

احسب U_5 .

11 - 1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم ،

$$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2) من اجل كل عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2 نضع

$$S_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\ldots+(n-1)\times 2^{n-2}$$

برهن بالتراجع انه من اجل كل $n\geq 2$ يكون $S_n=(n-1)2^n-n\times 2^{n-1}+1$

3) a عدد حقيقي موجب تماما .

- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $(1+a)^n\geq 1+na$

12 - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون :

1) $2\times 6\times 10\times\ldots\times(4n-2)=(n+1)(n+2)\ \ldots\ (2n)$

2) $14n^3+9n^2+n$ يقبل القسمة على 6.

3) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .

13 - 1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $5+4\times 2^{2n}$ يقبل القسمة على 3 .

2) نضع $L_n=2^{2n}\left[\left(2^{2n+1}-1\right)-1\right]$

1) بين ان $L_{n+1}-16L_n=3Q_n$ حيث $Q_n=5+4\times 2^{2n}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي L_n يقبل القسمة على 9.

14 - a طول القطعة $[AB]$ و لتكن M_1 منتصف $[AB]$ ، M_2 منتصف $[BM_1]$ ، M_3 منتصف $[M_1M_2]$ ، M_n منتصف القطعة $[M_{n-2}M_{n-1}]$

بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $AM_n=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r a}{2^r}+a$

15 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n+1}{U_n+3}$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $1\geq U_n\geq 0$

2) بين ان المتتالية (U_n) متزايدة .

16 - x عدد حقيقي، نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$C_n=\cos x+\cos 3x+\ \ldots\ +\cos(2n-1)x$$

1) بين ان $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

2) حول العبارتين التاليتين إلى مجاميع $\sin(nx)\cos(nx)$ و $\sin x\cos(2n+1)x$

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من اجل كل عدد حقيقي x

$$C_n=\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin x}\ \text{لدينا}\ k\in\mathbb{Z}\ ,\ x\neq k\pi$$

17 - برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\tan\left(\frac{x}{2^2}\right)+\ \ldots\ +\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}-\frac{1}{\tan(x)}$$

حيث $x\neq 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

18 - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$\sin x+\sin(2x)+\ldots+\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{1}{2}x}\times\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

حيث $x\neq 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

19 - نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1+3+5+ \ldots +(2n-1)$

1) احسب S_1 ، S_2 ، S_3 ، S_4

2) خمن عبارة S_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

20 - x عدد حقيقي كيفي

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right) = (x-1)\sum_{r=0}^{r=n-1} x^r$$

2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة.

21 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4

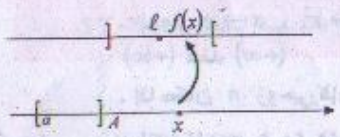
2) خمن عبارة U_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

الدرس 2

النِهَايَاتُ وَالاسِتِمْرَارُ

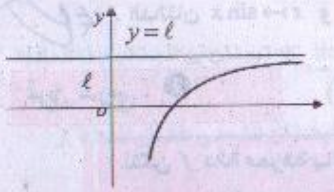
1 - النهايات في اللانهاية و المستقيمات المقاربة

1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ و المستقيم المقارب الأفقي



القول ان الدالة f لها نهاية حقيقية ℓ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من اجل كل قيم x الكبيرة (اي من اجل كل قيم x من المجال $]A, +\infty[$)

و نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.



إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فان المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ مقارب افقي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

ملاحظة

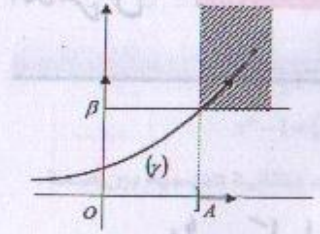
نعرف بطريقة مماثلة $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

مثال - ◆

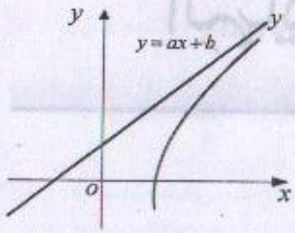
الدوال $x \mapsto \frac{1}{x}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N}^*)$ ، $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ لها النهاية صفر عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

1 - 2 النهاية الغير المنتهية عند $(+\infty)$

نقول أن الدالة f لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$
يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]\beta, +\infty[$
يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل
قيم x الكبيرة
(أي من أجل كل قيم x من المجال $]A, +\infty[$)
و تكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



إذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل
$f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$
فإن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$
مقارب مائل للمنحني الدالة f بجوار $(+\infty)$



ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $(-\infty)$ o

مثال - ◆

- الدوال $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto x^n$ مع $(n \in \mathbb{N}^*)$ ، $x \mapsto \sqrt{x}$ لها النهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$
- إذا كان n زوجي فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- إذا كان n فردي فإن $\lim\limits_{n \to -\infty} x^n = -\infty$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ ليست لهما نهاية عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$

تمرين تدريبي . ❶

لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$
1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2) أوجد العدد الحقيقي A بحيث إذا كان $x > A$ فإن $2,9 < f(x) < 3,1$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

2) نقول ان $2,9 < f(x) < 3,1$ يعني بذلك $3,001 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$

وبما اننا نهتم بالقيم الكبرى لـ x فإن $x-1 > 0$.

بضرب حدود المتباينة $2,999 < \frac{3x-2}{x-1} < 3,1$ بالعدد $(x-1)$ نجد :

$2,999(x-1) < 3x-2 < 3,001(x-1)$

اي $-0,001x-2,999 < -2 < -0,001x-3,001$

حل المتراجحة $0,001x-3,001 > -2 > -0,001x-2,999$ يكافئ حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} -0,001x-2,999 > -2 \quad \ldots\ldots (1) \\ -2 > 0,001x-3,001 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases} \quad \ldots\ldots \text{❶}$$

بعد حل المتراجحة (1) نجد $x > -999$

بعد حل المتراجحة (2) نجد $x > 1001$

إذن مجموعة حلول الجملة ❶ هي $]1001, +\infty[$

و بالتالي يمكن اخذ $A = 1001$

. اي كلما اخذ x قيما اكبر من A فإن قيم $f(x)$ تتراكم حول القيمة 3 .

تمرين تدريبي . ❷

من اجل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
و $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ و نعلم ايضا لما $x > 5$ فإن $f(x) > 4$
و لما $x < -8$ فإن $f(x) - x + 1 < 0$ ماذا نستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f ؟

✓ الحل

. المعلومة « $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ » تبين لنا ان المستقيم ذا المعادلة $y = 4$ مقارب افقي للمنحنى المثل للدالة f في جوار $(+\infty)$

. المعلومتان « $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ » تبينان أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني المثل للدالة f عند $(-\infty)$.

. المعلومة « إذا كانت $x > 5$ فإن $f(x) > 4$ » تبين لنا أيضا أن المنحنى المثل للدالة f يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y = 4$ على المجال $]5, +\infty[$

. المعلومة « إذا كانت $x < -8$ فإن $f(x) - x + 1 < 0$ » تبين لنا ان المنحنى يقع تحت المستقيم المقارب المائل ذي المعادلة $y = x - 1$ على $]-\infty, -8[$

تمرين تدريبي - 3

لتكن f دالة معرفة كما يلي $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$ مع $x\neq 0$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) ماذا تستنتج من حساب النهايتين السابقتين بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

2) نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+2+\frac{1}{x}$

- بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=0$ ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- بما أن $f(x)-(x+2)=\frac{1}{x}$ فإنه إذا كان $x<0$ فإن المنحنى يقع فوق المستقيم (d)

و إذا كان $x>0$ فإن المنحنى يقع تحت (d) حيث $(d): y=x+2$

2 - نهاية دالة عند عدد حقيقي a

نرمز بـ D_f إلى مجموعة تعريف الدالة f

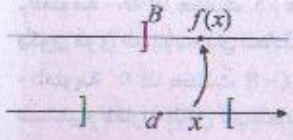
و a عدد حقيقي ينتمي إلى D_f

أو a لا ينتمي إلى D_f (a حاد لـ D_f)

2 - 1 النهاية المنتهية عند a ـ المستقيم المقارب العمودي

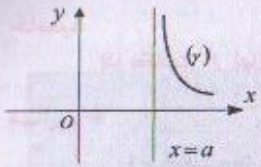
نقول أن الدالة f لها النهاية $(+\infty)$ عند a

يعني أن كل مجال من الشكل $]\beta,+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a (أي من أجل كل x من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من D_f)



و نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة f



ملاحظة

1) نعرف بطريقة مماثلة $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

2) نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $(-\infty)$ لما x يؤول إلى a

يعني أن $-f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى a

مثال - ◆

لتكن f و g دالتين معرفتين على $]0,+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2}$

- الصفر هو حاد لمجموعة تعريف f .

مهما كانت قيمة العدد الحقيقي M كبيرة فالأعداد $f(x)$ تتجاوز قيمة M من أجل كل قيمة لـ x من $\left]0,\frac{1}{M}\right[$ لأن المتباينة $\frac{1}{x}>M$ تكون صحيحة

عندما يكون $0<x<\frac{1}{M}$ و نكتب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

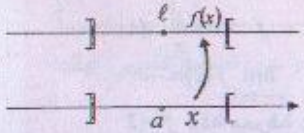
- بنفس الكيفية السابقة نبين أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

2 - 2 النهاية الحقيقية (المنتهية) عند a

نقول أن العدد الحقيقي ℓ هو نهاية الدالة f لما x يقترب من a

يعني أن كل مجال مفتوح مركزه L يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a (أي من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من D_f)

و نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$



هذا التعريف يعني أن المسافة بين $f(x)$ و ℓ تقترب من الصفر.

إذن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ تعني أن $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-\ell|=0$

نتيجة

إذا كان a من D_f و f لها نهاية ℓ عند a فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

خاصية

إذا كانت f لها نهاية ℓ عند a فان هذه النهاية وحيدة

مثال . ◆

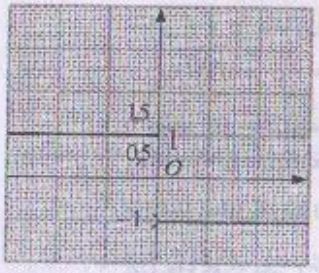
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

يمكننا ان نثبت صحة هاتين النهايتين باستعمال نظرية الحصر .

ملاحظة

ليس بالضرورة ان تكون لدالة نهاية عند قيمة من مجموعة تعريفها.

مثال . ◆



f دالة تمثيلها البياني كما في الشكل

$f(0)=1$ لكن 1 ليس نهاية لـ f لما x يؤول إلى الصفر.

لأن باعتبار المجال المفتوح $I=]0,5\ ;\ 1,5[$ فإنه من أجل كل قيم x القريبة من الصفر و اكبر تماما منه يكون $f(x)=-1$

لكن -1 لا ينتمي إلى المجال I .

• **النهاية من اليمين و من اليسار عند a**

يحصل و أن دالة لا تقبل نهاية (حقيقية او غير منتهية) عند a لكن اقتصارها على مجال من الشكل $]a,b[$ لها نهاية ℓ عند a .

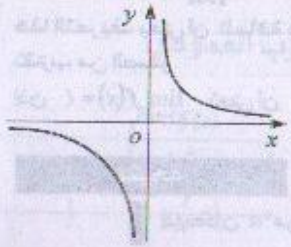
نقول عندئذ أن f لها نهاية من اليمين عند a و نكتب $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$

بنفس الطريقة إذا كان اقتصار f على المجال $]c,a[$ يقبل نهاية ℓ عند a نقول أن f تقبل نهاية من اليسار عند a و نكتب $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$

مثال . ◆

1) $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$



2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

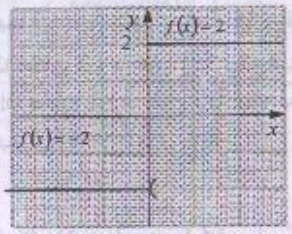
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2$$



الدالة f ليس لها نهاية عند الصفر.

تمرين تدريبي . ❶

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+5}$ لها النهاية 3 عند 4

أوجد مجال I مركزه 3 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in]2,99\ ;\ 3,01[$

✓ **الحل :**

القول أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,99\ ;\ 3,01[$ يعني $2,99<f(x)<3,01$

أي $2,99<\sqrt{x+5}<3,01$ بالتربيع نجد $8,9401<x+5<9,0901$

و بطرح 5 من حدود هذه الأخيرة نجد $3,9401<x<4,0901$ إذن $I=]3,9401\ ;\ 4,0901[$

تمرين تدريبي . ❷

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2,3\}$ ، جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ \| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ \| $+\infty$	$\searrow$	5

استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى البياني للدالة f و عين الوضع النسبي لهذه المستقيمات بالنسبة إلى منحنى f .

✓ **الحل :**

- بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ فإن المستقيم (d_1) ذا المعادلة $y=2$ مقارب افقي للمنحنى (γ)

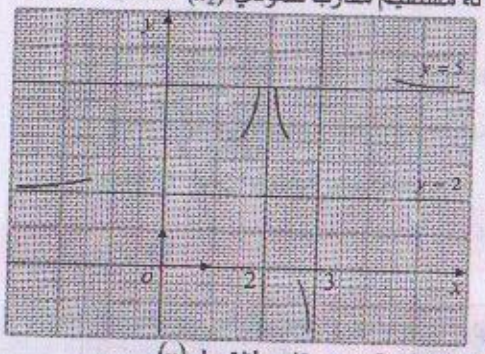
و بما انه من اجل كل x من المجال $]-\infty,2[$ لدينا $f(x)\rangle 2$

فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_1)

- بما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (γ) له مستقيم مقارب عمودي (d_2) معادلته $x=2$.

إذا كان $x\langle 2$ فإن (γ) يقع قبل (d_2)

و إذا كان $x\rangle 2$ فإن (γ) يقع بعد (d_2)



- بما أن $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

فإن المستقيم (d_3) ؛ $x=3$

مقارب عمودي لـ (γ) .

إذا كان $x\rangle 3$ فإن (γ) يقع بعد (d_3)

و إذا كان $x\langle 3$ فإن (γ) يقع قبل (d_3)

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ فإن المستقيم (d_4) ذا المعادلة $y=5$ مقارب افقي لـ (γ)

و بما انه من اجل كل $x\in]3,+\infty[$ لدينا $f(x)\rangle 5$ فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_4) .

3 - عمليات على النهايات

لما تكون للدالتين f و g نهايات معروفة نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال :

$f+g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ و نبين مختلف هذه النهايات في الجداول التالية :

النهايات مأخوذة عند $(+\infty)$ او عند $(-\infty)$ او عند عدد حقيقي a .

ℓ و ℓ' عددان حقيقيان

• نهاية مجموع دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

• نهاية جداء دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	$\ell\rangle 0$	$\ell\rangle 0$	$\ell\langle 0$	$\ell\langle 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ او $-\infty$
فإن نهاية $f\times g$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين

- حالة نهاية الدالة g غير معدومة

إذا كانت نهاية f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ او $-\infty$
إذا كانت نهاية g	$\ell\neq 0$	$-\infty$ او $+\infty$	$\ell'\rangle 0$	$\ell'\langle 0$	$\ell'\rangle 0$	$\ell'\langle 0$	$+\infty$ او $-\infty$
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالة نهاية الدالة g معدومة :

إذا كانت نهاية f	$0\rangle\ell$ او $+\infty$	$0\rangle\ell$ او $+\infty$	$0\langle\ell$ او $-\infty$	$0\langle\ell$ او $-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالات عدم التعيين هي $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

- نعلم أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة.

- نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ او $-\infty$ تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة في البسط و كذلك في المقام.

مثال - ◆

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

تمرين تدريبي - 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=4x^3-3x^2+x$

احسب النهايتين التاليتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

✓ الحل

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

إذن لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ (حالة عدم التعيين)

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $(+\infty)$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة و عليه :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

كل حد من المجموع له نهاية $(-\infty)$ و بالتالي نستطيع تطبيق القواعد العملية المتعلقة بمجموع دالتين و عليه فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

تمرين تدريبي . ❷

f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^3\left(4-\frac{1}{x}\right)$.

ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند الصفر.

✓ الحل :

- نضع $U(x)=x^3$ و $V(x)=4-\frac{1}{x}$ عندئذ $f=U\times V$

$\lim\limits_{x\to+\infty} U(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x)=4$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x\to0} U(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0} V(x)=-\infty$

إذن في هذه الحالة لدينا عدم التعيين و بالتالي لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند 0 .

ويمكن أن نكتب $f(x)=4x^3-x^2$ و منه $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

تمرين تدريبي . ❸

1) لتكن f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+x-7}{x^2-3x+2}$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة f

ب) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

2) لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+2}{x+1+\sqrt{x}}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

✓ الحل

1) أ) f دالة معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-3x+2\neq0$.

المعادلة $x^2-3x+2=0$ لها حلان هما 1 و 2

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

ب) $\lim\limits_{x\to1}(2x^2+x-7)=-4$ و $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$ إذن يجب معرفة إشارة المقام .

على يسار العدد 1 إشارة المقام موجبة و على يمينه إشارة المقام سالبة و منه

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2}(2x^2+x-7)=3$ موجبة و $\lim\limits_{x\to2}(x^2-3x+2)=0$

إذن يجب معرفة إشارة المقام على يسار 2 المقام سالب و على يمينه المقام موجب و منه :

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$

2) من أجل قيم كبرى لـ x فإن سلوك $x+2$ و $x+1+\sqrt{x}$ من سلوك x لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

و بالتالي نستطيع أن نخمن في أول وهلة أن 1 هي نهاية g عند $+\infty$.

و للبرهان على ذلك نضع العنصر المهيمن x كعامل مشترك في البسط و المقام .

من أجل كل $x\neq0$ لدينا $g(x)=\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}$

و منه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

❹ - نظريات المقارنة

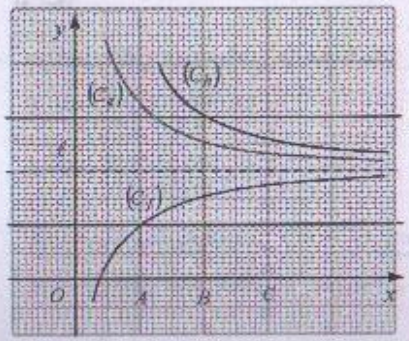
4 - 1 نظرية الحصر

مبرهنة ❶

إذا كان من أجل كل x من المجال $]\alpha,+\infty[$

لدينا $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$ حيث ℓ عدد حقيقي .



الإثبات

ليكن J مجالا مفتوحا كيفيا مركزه ℓ

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي A

بحيث من أجل كل $x>A$ يكون $f(x)\in J$.

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي B

بحيث من أجل كل $x>B$ يكون $h(x)\in J$

إذا اخترنا C عددا حقيقيا بحيث $C>A$ و $C>B$

وكان $x>C$ فإن $f(x)\in J$ و $h(x)\in J$

لكن $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

إذن $g(x) \in J$ مما يبرهن ان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$

ملاحظة

نتيجة البرهنة (1) تبقى صحيحة إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

نتيجة

إذا كان $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ فإن $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

برهنة ❷

f و g دالتان معرفتان على $I =]\alpha, +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $|f(x) - \ell| \leq g(x)$

و إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

الإثبات:

المتباينة $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ تعني ان $\ell - g(x) \leq f(x) \leq \ell + g(x)$.

و بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ و حسب القواعد العملية في حساب النهايات فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell - g(x)] = \ell$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ell + g(x)] = \ell$.

وحسب البرهنة (1) فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

مثال - ◆

- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x - 1}{x}$

✓ الحل

- من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$

و عليه $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

و لكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

- من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$

و عليه $\frac{-2}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 0$ و لكون $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

4 - 2 المقارنة في اللانهاية

برهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I =]\alpha, +\infty[$.

1) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \geq g(x)$ و إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \leq g(x)$ و إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة

نتيجة البرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما اذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

مثال - ◆

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x)$

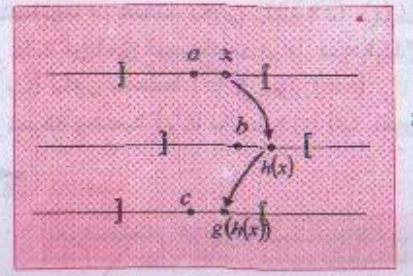
✓ الحل :

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه $-1 + x \leq x + \sin x \leq 1 + x$

- بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$ و $f(x) \geq 1 + x$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} (-1 + x) = -\infty$ و $f(x) \leq -1 + x$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

5- نهاية الدالة المركبة



برهنة

f ، g ، h ثلاث دوال بحيث $f(x) = g(h(x))$.

كل من الحروف a, b, c تمثل إما أعدادا حقيقية

او $+\infty$ او $-\infty$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$

و إذا كانت $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مثال - ◆

1) g و h دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=2x+3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(h(x))$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x}{x-3}}$

✓ الحل

1) على المجال $]-1,+\infty[$ لدينا $g(h(x))=\sqrt{2x+4}$

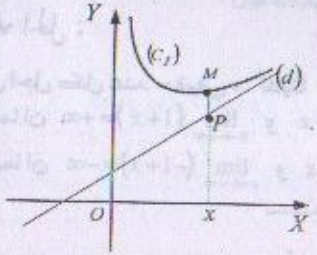
و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(h(x))=+\infty$

2) نضع $h(x)=X=\frac{3x}{x-3}$ و $g(X)=\sqrt{X}$

ومنه $\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=g(h(x))$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$ و $\lim\limits_{X\to3} g(X)=\sqrt{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=\sqrt{3}$.

6 - المستقيم المقارب المائل



(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى .

القول ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=ax+b$ مع $a\neq0$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

يعني ان $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

التفسير الهندسي

من أجل قيمة x من مجال تعريف الدالة f نعتبر

النقطة M من (C_f) و النقطة P من (d)

فاصلتهما x عندئذ يكون $PM=|f(x)-(ax+b)|$

و عليه من اجل قيم كبرى لـ x المسافة PM تقترب من الصفر و هذا مما يفسر ان المنحنى (C_f) يكون بمحاذاة (d) في جوار $(+\infty)$.

و لمعرفة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) نعين إشارة $[f(x)-(ax+b)]$

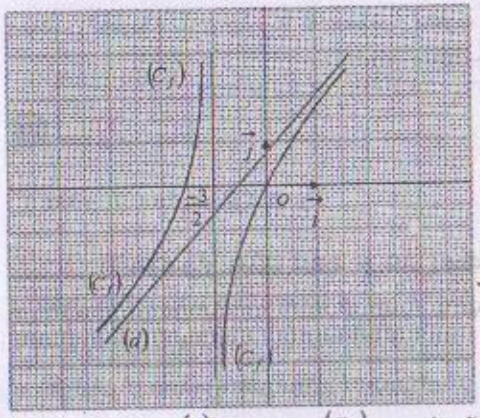
ملاحظة

نعرف بنفس الطريقة المستقيم المقارب المائل بجوار $(-\infty)$

مثال - ◆

- بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x+1}$

- ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d)



✓ الحل

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2+3x}{x+1}-(2x+1)$$

$$=\frac{2x^2+3x-2x^2-3x-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0$ فإن المستقيم (d) هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x<-1$ فإن $\frac{-1}{x+1}>0$

و بالتالي المنحني (C_f) يقع فوق (d)

و إذا كان $x>-1$ فإن $\frac{-1}{x+1}<0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت (d) .

مبرهنة

f دالة بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ مع a و b عددين حقيقيين و $a\neq0$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما اذا كان x يؤول إلى $-\infty$

مثال - ◆

f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ و آخر في جوار $(-\infty)$.

✓ الحل

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ معادلته $(d_1): y=x$

- بنفس الطريقة نبين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (d_2) معادلته $y=-x$ في جوار $(-\infty)$

7 - الاستمرار

f دالة و I مجال محتوى في D_f

7 -1 الاستمرار عند عدد و على مجال

- القول أن f مستمرة عند العدد a من I يعني أن f لها نهاية عند a و هذه النهاية بالضرورة $f(a)$ و نكتب $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ أو $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

- القول أن f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل قيمة من I .

نتيجة

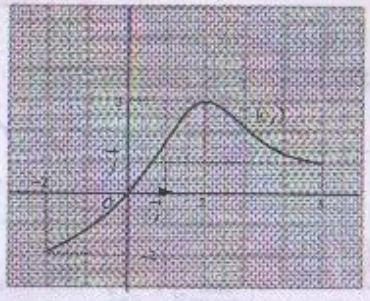
نستنتج من تعريف الاستمرار و القواعد العملية لحساب النهايات أن مجموع ، و جداء و مركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

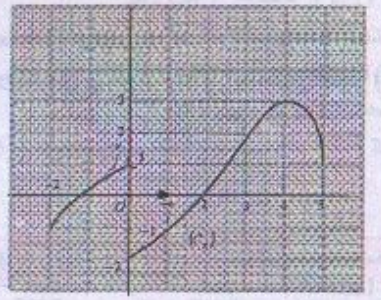
ملاحظة

دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى .

مثال - 1

f و g دالتان معرفتان على المجال $I=[-2,5]$ ، (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين كما هو موضح في الشكلين.





- الدالة f مستمرة على المجال I لأن (C_f) عبارة عن خط منحن غير متقطع رسمناه بدون رفع القلم .

- الدالة g غير مستمرة على المجال I لأن $\lim_{x\to 0} g(x)=1$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=-2$

إذن g ليست لها نهاية عند $x=0$

مثال - 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{|x|-1}{2}$. ادرس استمرار f عند $x=0$

✓ الحل

بما أن $\begin{cases}|x|=x & , x\geq 0\\ |x|=-x & , x\leq 0\end{cases}$

فإن $\begin{cases}f(x)=\frac{x-1}{2} & , x\geq 0\\ f(x)=\frac{-x-1}{2} & , x\leq 0\end{cases}$

$$f(0)=\frac{|0|-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f لها نهاية $-\frac{1}{2}$ عند $x=0$ و بالتالي فهي مستمرة عند $x=0$

7 - 2 قابلية الاشتقاق و الاستمرار

مبرهنة

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a من I فإن f مستمرة عند a

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f مستمرة عل I

الإثبات

f دالة قابلة للاشتقاق عند a يعني أن الدالة g المعرفة بـ :

$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية $f'(a)$

من أجل كل $x\neq a$ لدينا $g(x)(x-a)=f(x)-f(a)$

ومنه ينتج $f(x)=f(a)+g(x)(x-a)$

و بما أن $\lim_{x\to a} g(x)=f'(a)$ و $\lim_{x\to a}(x-a)=0$

فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ و هذا يعني أن f دالة مستمرة عند a .

ملاحظة :

إذا كانت دالة مستمرة عند عدد a فلا نستطيع القول أنها قابلة للاشتقاق عند a

مثال - ◆

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|+1$

. الدالة f مستمرة عند الصفر لكن غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+1-1}{x}=-1$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

استمرار الدوال المرجعية

- دالة الجذر التربيعي قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ إذن فهي مستمرة على نفس المجال

وبما أن $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0=\sqrt{0}$ فإن هذه الدالة مستمرة عند الصفر

ومنه دالة الجذر التربيعي مستمرة على المجال $[0,+\infty[$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و بالتالي فهي مستمرة على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها .

- الدالتان $x\mapsto\sin x$ و $x\mapsto\cos x$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن فهما مستمرتان على $\mathbb{R}$

ملاحظة

كل الدوال المشكلة من دوال مرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.

مثال - ◆

f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$ بوضع $g(x)=x^2+1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ يكون $f(x)=hog(x)$

إذن الدالة f هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي فالدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

8 - دراسة دالة الجزء الصحيح

من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث $n+1\rangle x\geq n$.

نسمي دالة الجزء الصحيح بالدالة التي نرمز لها بـ E و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال

$[n,n+1[$ العدد الصحيح n و نكتب $E(x)=n$

- نختار بعض القيم لـ x

$E(0)=E(0,25)=E(0,75)=0$

$E(1)=E(1,002)=E(1,999)=1$

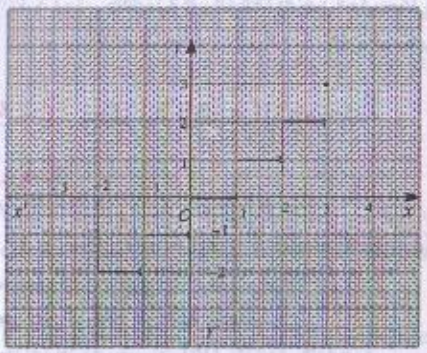
$E=(-0,3)=E(-0,5)=-1$

من أجل $0\leq x\langle 1 : E(x)=0$

من أجل $1\leq x\langle 2 : E(x)=1$

من أجل $2\leq x : E(x)=2$

. على المجال $[-2,3]$ يتكون التمثيل البياني للدالة E من خمس قطع مستقيمة ونقطة معزولة .



. الدالة E معرفة عند 2 و على مجال مركزه 2

وبما أن $\lim_{x\to 2}E(x)=1$ و $\lim_{x\to 2}E(x)=2$ فإن الدالة E ليست لها نهاية عند 2

و بالتالي فهي ليست مستمرة عند هذه القيمة وعليه فإنها مستمرة على $[1,2[$

9 - الدوال المستمرة و حلول المعادلات

في حالة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية نستطيع حل المعادلة $f(x)=k$

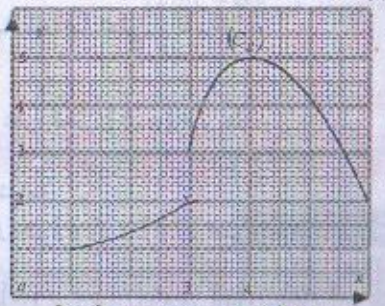
أما في حالة دالة كيفية لا نستطيع تعيين الحل الجبري لذلك نلجأ إلى التحليل الذي يسمح لنا بإيجاد القيم التقريبية للحلول إن وجدت و بالدقة التي نريدها.

و قبل إجراء أي حساب لابد من معرفة هل توجد حلول أم لا.

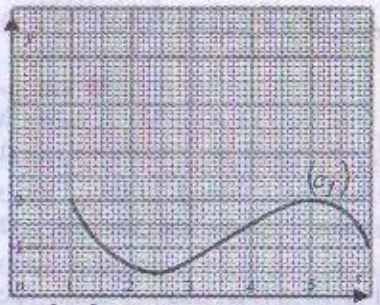
مثال - ◆

المنحنيان الممثلان في الشكلين المجاورين هما لدالتين f و g المعرفتين على $[1,6]$

الحل البياني للمعادلة $f(x)=k$ هو البحث عن فواصل نقط تقاطع إن وجدت بين (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y=k$



الدالة g غير مستمرة على $[1,6]$



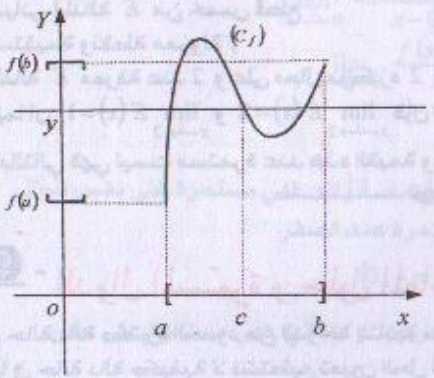
الدالة f مستمرة على $[1,6]$

- بالنسبة إلى الدالة f من أجل $1 \le k \le 2$ المعادلة $f(x)=k$ لها حلول
- بالنسبة إلى الدالة g من أجل كل $1 \le k \le 5$ لا توجد حلول للمعادلة $g(x)=k$ لأنه إذا كان $2 < k < 3$ فإن المستقيم $y=k$ لا يقطع المنحنى (C_g) .

9 - 1 نظرية القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$.
من أجل كل عدد حقيقي y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصورة بين a و b بحيث $f(c)=y$.



نعبر عن نتيجة المبرهنة بكيفيتين مختلفتين بفرض أن $f(b) \le f(a)$ و بوضع $I=[a,b]$ نستطيع القول بطرق متكافئة

- من أجل كل y من المجال $[f(a),f(b)]$ المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول x تقبل على الأقل حلا c من المجال I.
- كل عدد حقيقي y من $[f(a),f(b)]$ هو صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة مستمرة على I .
صورة $I=[a,b]$ بالدالة f و نرمز لها بـ $f(I)$ هي مجموعة كل الأعداد $f(x)$ لما x يمسح I

ملاحظة

المجال $[f(a),f(b)]$ محتوى في $f(I)$

9 - 2 الدالة المستمرة و الرتيبة تماما على $[a,b]$

مبرهنة 1

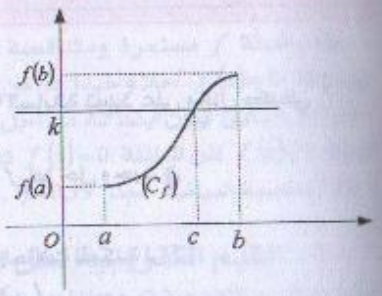
إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $I=[a,b]$ فإن :
1) صورة I بالدالة f هي المجال $[f(a),f(b)]$ في حالة f متزايدة تماما و $[f(b),f(a)]$ في حالة f متناقصة تماما
2) من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا في $[a,b]$.
نقول عندئذ أن f تقابل من $[a,b]$ في $[f(a),f(b)]$ او في $[f(b),f(a)]$

الإثبات

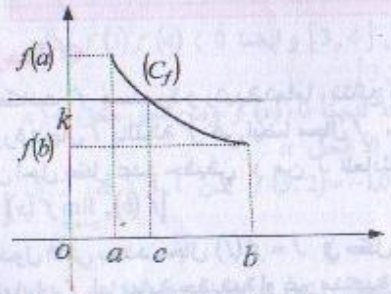
نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على I و k عددا حقيقيا من المجال $[f(a),f(b)]$

1) من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(a) \le f(x) \le f(b)$
إذن كل صورة $f(x)$ تنتمي إلى $[f(a),f(b)]$
و هذا معناه $f(I) \subset [f(a),f(b)]$ (1)
و بالعكس إذا كان $y \in [f(a),f(b)]$ فإن :
y هي صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I إذا $y \in f(I)$
و هذا معناه $[f(a),f(b)] \subset f(I)$ (2)
من (1) و (2) نجد أن $f(I)=[f(a),f(b)]$

2) حسب نظرية القيم المتوسطة نستطيع إيجاد عدد c من $I=[a,b]$ بحيث $f(c)=k$.
إذن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال I و هذا الحل يكون وحيدا لأنه إذا كان لدينا عددان حقيقيان c و c' من I و $c < c'$ بحيث $f(c)=f(c')=k$ فإن f ليست متزايدة وهذا تناقض حيث f متزايدة تماما على I .
نتيجة المبرهنة تبقى صحيحة إذا كانت f متناقصة تماما على $[a,b]$



f دالة متزايدة تماما على $[a,b]$
مجموعة الوصول هي $[f(a),f(b)]$



f دالة متناقصة تماما على $[a,b]$
مجموعة الوصول هي $[f(b),f(a)]$

ملاحظة

إذا كانت $k=f(a)$ فإن $c=a$ و إذا كان $k=f(b)$ فإن $c=b$

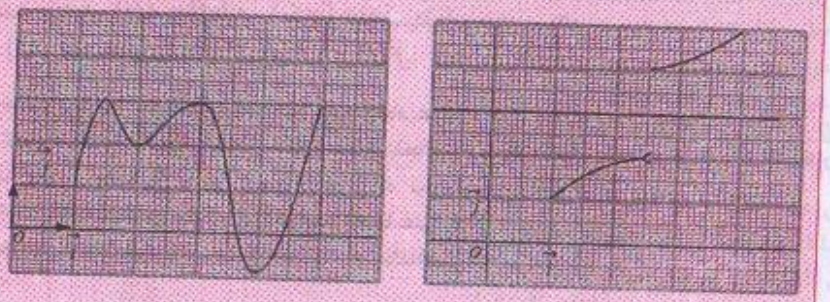
نتيجة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على $I=[a,b]$ و إذا كانت $f(a)f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في I .

ملاحظة

1) إذا كانت الدالة f ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونا كما يبينه الشكل (1)
فمثلا المعادلة $f(x)=3$ ليس لها حل.

2) وحدانية الحل مضمونة بالرتابة التامة (متزايدة تماما او متناقصة تماما) فإذا كانت الرتابة غير تامة نستطيع ان نتحصل على عدة حلول كما يبينه الشكل (2)
فمثلا المعادلة $f(x)=3$ لها عدة حلول على المجال $[1,5]$.



مبرهنة ❷

إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما ، نتائج المبرهنة ❶ السابقة تمدد على مجال كيفي I .
صورة المجال I بالدالة f هي أيضا مجال J ،
ومن اجل كل عدد حقيقي y من J المعادلة $f(x)=y$ لها حل وحيد في I.
$\left]f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$.

الجدول الآتي يحدد مجال $J=f(I)$ في كل حالة من الحالات الممكنة لـ I.
نتقبل ان f لها نهاية حقيقية أو غير منتهية على أطراف I
وسنريك في الجدول التالي المجال J حيث a و b تمثل اعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

$I=$	صورة I بالدالة f هو المجال	
	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x),\lim\limits_{x\to a} f(x)[$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=-x^3+3x^2+1$
برهن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in[3,4]$ ثم اعط حصرا له بتقريب 10^{-1}

✓ الحل

الجدول التالي يلخص لنا دراسة الدالة f

x	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	1	↘	-15	↘	$-\infty$

- بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[3,4]$ و ايضا $f(3)f(4)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $[3,4]$.
- الجدول السابق يبين ايضا انه من اجل كل $x<3$ لدينا $f(x)>0$ ومن اجل كل $x<4$ لدينا $f(x)>0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ إلا الحل α .
بالآلة الحاسبة البيانية نجد $f(3,1)=0,39$ و $f(3,2)=-1,04$ إذن $3,1<\alpha<3,2$

9 - 3 القيم التقريبية لحل معادلة

نظرية القيم المتوسطة تسمح لنا بواسطة الحصر المتوالي بتحديد القيم القريبة من حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال المعطى $I=[a,b]$
نفرض ان $f(a)<0$ و $f(b)>0$ وليكن $x\in[a,b]$.

طريقة المسح

نفرض ان f مستمرة و متزايدة تماما على $[a,b]$ و نقوم بحساب قيم f ابتداء من $f(a)$ بخطوة مقدارها p على النحو التالي ،
$f(a+p)$ ، $f(a+2p)$ ، حتى نتحصل على القيمة الموجبة $f(a+kp)$ مع $k\in\mathbb{N}$.
من القيمة a' التي تسبق $a+kp$ نبدل الخطوة p بالخطوة p' حيث $p'=\frac{p}{10}$ و نتابع الحسابات بالكيفية السابقة $f(a+p')$ ، ،
نكمل هذه العملية حتى نتحصل على التقريب المطلوب للحل.

مثال - ◆

من أجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$. أوجد حصرا بتقريب 0,001 للحل β ، حيث β محصورة بين 0 و 4 .

✓ الحل

نشكل أولا جدولا من عمودين الأول لـ x و الثاني لـ $f(x)$ حيث $f(x)=x^3-6x^2+7$.
ابتداء من الصفر بخطوة $p=1$ نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x)\rangle 0$ و في هذه الحالة تكون $x=1$.
ونشكل جدولا ثانيا بخطوة مقدار 0,1 . ابتداء من القيمة 1 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x)\rangle 0$ و في هذه الحالة $x=1,2$
و نشكل جدولا ثالثا بخطوة مقدار 0,01 ابتداء من القيمة 1,2 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $0\langle f(x)$ و التي هي $x=1,20$
و نشكل جدولا رابعا بخطوة مقدارها 0,001 ابتداء من 1,20 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x)\rangle 0$ و في هذا الجدول $x=1,208$
الحصر بتقريب 0,001 للحل β هو $1,208\langle\beta\langle 1,209$

x	$f(x)$
0	7
1	2
2	-9

$p=1$
$1\langle\beta\langle 2$

x	$f(x)$
1	2
1,1	1,071
1,2	0,088
1,3	-0,943

$p=0,1$
$1,3\langle\beta\langle 1,2$

x	$f(x)$
1,2	0,088
1,21	-0,0131

$p=0,01$
$1,21\langle\beta\langle 1,20$

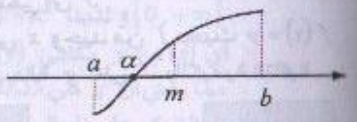
x	$f(x)$
1,200	0,0880
1,201	0,0779
1,204	0,0480
1,206	0,0276
1,207	0,0176
1,208	0,072
1,209	-0,01

$p=0,001$

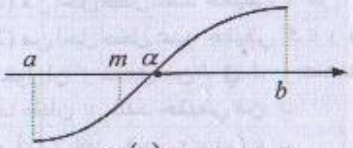
طريقة ديكتومي (القسمة على اثنين)

نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ، و نحسب $f(m)$ حيث m منتصف المجال $[a,b]$
إشارة $f(m)$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[a,m]$ أو إلى $[m,b]$.

- إذا كان $f(m)\rangle 0$ فإن α ينتمي إلى $[m,b]$ و في هذه الحالة نعيد قسمة المجال $[m,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول و نحسب $f(m')$ حيث $m'=\frac{m+b}{2}$.
- إشارة $f(m')$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[m',b]$ أو إلى $[m,m']$ و هكذا نعيد عملية قسمة المجالات حتى نحصل على التقريب المطلوب .



(إذا كانت $f(m)\rangle 0$)
(α تنتمي إلى $[a,m]$)



(إذا كانت $f(m)\langle 0$)
(α تنتمي إلى $[m,b]$)

ملاحظة

إذا كان $f(m)\rangle 0$ فان α ينتمي إلى المجال $[a,m]$ نعيد نفس العملية السابقة للحصول على التقريب المطلوب .

مثال - ◆

من أجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$. أوجد حصرا بتقريب 0,1 للحل β حيث $0\rangle\beta\rangle 4$

✓ الحل

نضع $f(x)=x^3-6x^2+7$ ، $I=[a,b]=[0,4]$ ، $f(0)=7$ ، $f(4)=-25$.
بقسمة المجال $[0,4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول نحصل على $[0,2]$ و $[2,4]$
لدينا $m=\frac{0+4}{2}=2$ و $f(m)=f(2)=-9$
بما أن $f(m)\rangle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى المجال $[0,2]$
نقسم المجال $[0,2]$ إلى مجالين لهما نفس الطول فنحصل على $[1,2]$ ، $[0,1]$.
لدينا $m'=1$ و $f(m')=2$
بما أن $f(m')\rangle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1,2]$
نقسم المجال إلى $[1,2]$ إلى مجالين $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ ، $\left[\frac{3}{2},2\right]$.
لدينا $m''=\frac{3}{2}$ و $f(m'')=-3,125$
بما أن $f(m'')\rangle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1;1,5]$ و منه $1,0\langle\beta\langle 1,5$.



تطبيقات نموذجية

تطبيق ❶

حساب النهايات

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=4x^3-2x-1$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2) $f(x)=-x^4+3x^2+7$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 2

4) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ و عند -3

5) $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ و عند 2

6) $f(x)=x^2+3-\dfrac{2}{(x-4)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 4

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x^4)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^4)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ إذن لتعيين $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ نعين إشارة $(x-2)$

إذا كان $x<2$ فإن $x-2<0$ وإذا كان $x>2$ فإن $x-2>0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}} f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+3x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$

فإن نهاية f في جوار 3 هي من الشكل $\dfrac{0}{0}$

من أجل $x\neq-3$ يكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{x(x+3)}{x+3}=x$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ >}} f(x)=-3$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$

فحسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تطبيق ❷

حساب النهايات لدوال ناطقة

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ ، 1 ، 5

2) $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ عند 2

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$ عند $+\infty$ و عند 2

4) $f(x)=\dfrac{|x^2-x|}{x^2+x-2}$ عند $+\infty$ ، $-\infty$ ، 1

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$ ، $\lim\limits_{x\to5}(x+2)=7$ و $\lim\limits_{x\to1}(x^2-6x+5)=0$ و $\lim\limits_{x\to5}(x^2-6x+5)=$

إذن لتعيين نهاية f عند 1 أو عند 5 لابد من معرفة إشارة المقام.

- من أجل كل عدد حقيقي x حيث $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$

و من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x<1$ لدينا $x^2-6x+5>0$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=-\infty$

- من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>5$ لدينا $x^2-6x+5>0$

ومن أجل كل عدد حقيقي x حيث $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$

ومنه $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=\lim\limits_{x\to 2}(x^4-16)=0$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

إذن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{15}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}=+\infty$

إذن نهاية f من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}}{x(x-2)\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)}{x(x-2)\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x-2}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to 2^+} x\sqrt{x-2}=0^+$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=+\infty$

4)
$$\begin{cases}|x^2-x|=-x^2+x, & x\in[0,1]\\ |x^2-x|=x^2-x, & x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$

ومنه الدالة $f(x)$ تكتب:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{-x^2+x}{x^2+x-2}, & x\in[0,1]\\ f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+x-2}, & x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x}{x+2}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}$$

تطبيق 3 حساب النهايات لدوال جذرية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$ ، د) $f(x)=\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند 1

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x}}{x}}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

د) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-5)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4})}=\lim_{x\to 1}\frac{-5(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}}=-\frac{10}{3}$$

تطبيق 4 حساب النهايات لدوال مثلثية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

ا) $f(x)=\frac{\sin 6x}{x}$ عند 0 ، ب) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ عند 0 و عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ ، د) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند 0

✓ الحل

ا) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{6x}=6\lim\frac{\sin 6x}{6x}=6\times 1=6$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}\sin 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0} 2\sqrt{x}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=0\times 1=0$$

- من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $-1\le \sin(2x)\le 1$

و منه $\frac{-1}{\sqrt{x}}\le\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

جـ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0} 2\cos\frac{x}{2}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=2$$ إذن

لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}2\cos\frac{x}{2}=2$

د) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0} 2\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

تطبيق 5 حساب النهايات

عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{5x-2}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد المجال I بحيث إذا كان x ينتمي إلى I فإن $f(x)\rangle 10^2$

✓ الحل

$\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)=3$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$ و منه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

$f(x)\rangle 10^2$ يكافئ $\frac{5x-2}{(x-1)^2}\rangle 10^2$ يكافئ $10^2x^2-205x+102\langle 0$

$\Delta=(205)^2-4\times 100(102)=1225$

$x_1=\frac{205+35}{100}=\frac{240}{100}=2,4$ ، $x_2=\frac{205-35}{100}=\frac{170}{100}=1,7$

حتى يكون $10^2x^2-205x+102\langle 0$

يجب أن يكون $x\in\,]1,7\ ;\ 2,4[$

أي $1,7\langle x\langle 2,4$

إذن المجال $I=\,]1,7\ ;\ 2,4[$

x	$-\infty$		$1,7$		$2,4$		$+\infty$
$10^2x^2-205x+102$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تطبيق 6 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث أنه من أجل كل x لدينا (I) $1\le f(x)\le 2$

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=\frac{3f(x)+5}{x^3}$

اعط حصرا لـ $g(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

✓ الحل

بضرب المتباينة (I) بالعدد 3 نجد $3\le 3f(x)\le 6$ و بإضافة 5 إلى حدود هذه الأخيرة نجد

$8\le 3f(x)+5\le 11$... (II)

بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد الموجب تماما x^3 نجد $\frac{8}{x^3}\le g(x)\le\frac{11}{x^3}$

و بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد السالب تماما x^3 نجد $\frac{11}{x^3}\le g(x)\le\frac{8}{x^3}$

- بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{11}{x^3}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^3}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

- بما ان $\lim_{x\to-\infty}\frac{11}{x^3}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$

تطبيق 7 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{x}$

1) تحقق من ان $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) استنتج ان $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ ثم احسب نهاية f عند $+\infty$

✓ الحل

1) $f(x)=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}=\frac{(2+x)-(x)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x}$ اي $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge2\sqrt{x}$

و منه $f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$... (1)

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\le2\sqrt{x+2}$

و منه $f(x)\ge\frac{2}{2\sqrt{x+2}}$ اي $f(x)\ge\frac{1}{\sqrt{x+2}}$... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

- بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

تطبيق 8 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}$

1) بين ان $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}$... (1)

2) استنتج حصرا لـ $f(x)$ من اجل كل x ثم عين $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

✓ الحل

1) نعلم ان من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le-\cos x\le1$

بإضافة 3 إلى حدود المتباينة الأخيرة نجد $2\le3-\cos x\le4$ و بالقلب نجد :

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}$ (1)

2) بإضافة $2x$ إلى حدود المتباينة $-1\le\sin x\le1$ نجد :

$-1+2x\le2x+\sin x\le1+2x$ (2)

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$\frac{1}{4}(-1+2x)\le\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}(1+2x)$

بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}(-1+2x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تطبيق 9 دراسة وضعية المنحنى بالنسبة إلى مستقيم مقارب

ادرس النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 للدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{3x}{x+2}$

ثم حدد وضعية المستقيم المقارب الأفقي بالنسبة إلى المنحنى الدالة f.

✓ الحل

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$

$\lim_{x\to-2}\frac{3x}{x+2}=+\infty$ و $\lim_{x\to-2}\frac{3x}{x+2}=-\infty$

بما ان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=3$ مقارب افقي لـ (C_f)

و لدراسة وضعية (d) بالنسبة إلى (C_f) ندرس إشارة $f(x)-y$ على D_f

$f(x)-y=f(x)-3=\frac{3x}{x+2}-3=\frac{3x-3x-6}{x+2}=\frac{-6}{x+2}$

- إذا كان $x<-2$ فإن $\frac{-6}{x+2}>0$

و منه المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (d)

- إذا كان $x>-2$ فإن $\frac{-6}{x+2}<0$

و منه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (d)

تطبيق 10 حساب النهايات باستعمال الدالة المركبة

احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$ عند 5 ، $+\infty$

2) $f(x)=\cos \pi x+\frac{1}{(x-2)^2}$ عند 2

3) $f(x)=(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1})^3$ عند $+\infty$

4) $f(x)=\sin(\frac{\pi x+2}{2x+3})$ عند $-\infty$

✓ الحل

1) نضع $X=\frac{x+2}{x-4}$ ومنه $f(x)=\sqrt{X}$

$\lim\limits_{x\to 5} X=\frac{7}{1}=7$ ومنه $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\sqrt{7}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \cos \pi x=1$ و $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

وحسب قواعد العملية لجمع النهايات نجد $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1+\infty=+\infty$

3) نضع $X=x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$ منه $f(x)=X^3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{(x-1)x})=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)x}=0$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} X^3=+\infty$

4) بوضع $X=\frac{\pi x+2}{2x+3}$ فيكون $\lim\limits_{x\to+\infty} X=\lim \frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

تطبيق 11 تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$ و (C_f) منحناها البياني

عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا عموديا و يقبل عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=3x-4$ و يمر بالنقطة $A(2,3)$

✓ الحل

المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا له هذا معناه أن $4-d=0$ أي $d=4$

بما أن $y=3x-4$ معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=3$

و بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ فإن $a=3$

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x)-3x)=b$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x)-3x)=-4$ فإن $b=-4$

$A(2,3)$ تنتمي إلى (C_f) هذا معناه $f(2)=3$

$f(2)=3$ يكافئ $2a+b+\frac{c}{2-d}=3$ يكافئ $c=-2$

إذن $f(x)=3x-4-\frac{2}{x-4}$

تطبيق 12 تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل لمنحنى

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أثبت أن (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقاربا مائلا لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (d)

2) هل المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

✓ الحل

1) (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=0$

إذن (d) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x+1)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$

نلاحظ انه إذا كان $x\le 0$ فإن $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1\le 0$ و في هذه الحالة المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

- إذا كان $x \langle 0$ فإن $f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{-9}{(x+\sqrt{x^2+9})\sqrt{x^2+9}}$

بما أن $0 \langle x+\sqrt{x^2+9}$ و $0 \langle \sqrt{x^2+9}$ فإن $f(x)-(x+1) \langle 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

2) نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$

أي أن f فردية وبالتالي نظير المستقيم (d) بالنسبة إلى مبدأ المعلم هو $d': y=x-1$

إذن $y=x-1$ هي فعلا معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$

تطبيق 13 تعيين المنحنى المقارب لمنحنى

المنحنى المقارب f دالة معرفة على $]-\infty,-1[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}$

و (C_f) منحناها البياني أوجد معادلة منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f)

✓ الحل

لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تسلك سلوك $\frac{x^4}{x^2}$ أي x^2 و لا تسلك سلوك $ax+b$

إذن لا يمكن إيجاد مستقيم مقارب من الشكل $y=ax+b$ لـ (C_f) و عليه ندرس $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x^2-2)]=0$

و منه نستنتج أن المنحنى ذا المعادلة $y=x^2-2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

بما أن $f(x)-(x^2-2)=\frac{-1}{x^2+1}$ و $\frac{-1}{x^2+1} \langle 0$ فإن (C_f) يقع تحت المنحنى المقارب.

تطبيق 14 تعيين المستقيمات المقاربة لمنحنى

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{|9x^2-1|}$ و تمثيلها البياني (C_f)

1) حدد نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

2) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)$ ، ب) احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)$

جـ) استنتج أن (C_f) له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما ؟

✓ الحل

1) أ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|})$

$=\lim_{x\to+\infty}x+|x|\sqrt{|9-\frac{1}{x^2}|}$

$=\lim_{x\to+\infty}x(1+\sqrt{|9-\frac{1}{x^2}|})=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|}=\lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{|9-\frac{1}{x^2}|})$

$=\lim_{x\to-\infty}(x-x\sqrt{|9-\frac{1}{x^2}|})=\lim_{x\to-\infty}x(1-\sqrt{|9-\frac{1}{x^2}|})=+\infty$

2) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{(9x^2-1)}-4x)=\lim_{x\to-\infty}(-3x+\sqrt{(9x^2-1)}$

$-3x+\sqrt{9x^2-1}=\frac{(-3x+\sqrt{9x^2-1})\times(-3x-\sqrt{9x^2-1})}{(-3x-\sqrt{9x^2-1})}$

$=\frac{9x^2-9x^2+1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}=\frac{1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-3x-\sqrt{x^2-1}}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{-1+9x^2}+2x)=\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{1+9x^2})$

لدينا $3x+\sqrt{-1+9x^2}=\frac{(3x+\sqrt{-1+9x^2})(3x-\sqrt{-1+9x^2})}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=\frac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}$

وعليه $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=0$

جـ) من (ب) و (جـ) نستنتج أن (C_f) له مستقيمين مقاربين مائلين هما :

$(d_1): y=-2x$ في جوار $(-\infty)$ و $(d_2): y=4x$ في جوار $(+\infty)$

تطبيق 15 تعيين حلول معادلة

f دالة معرفة على $I=[0,3]$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x+2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عين $f(I)$

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$ على I ؟

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,3]$ و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$ و منه :

من اجل كل x من I لدينا $f'(x)<0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على I

$f(0)=\frac{1}{2}$ و $f(3)=\frac{1}{5}$

x	0	3
$f'(x)$	-	
$f(x)$	0,5 ↘	$\frac{1}{5}$

من جدول تغيرات f نستنتج أن

$f(I)=\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$

2) بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على I و $\frac{1}{4}$ ينتمي الى $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$ فإن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α للمعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$

تطبيق 16 تعيين حلول معادلة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1) احسب $f(-1)$, $f(\frac{-1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$

2) استنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية على المجال $[-1,1]$

✓ الحل

1) $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(0)=\frac{-1}{2}$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(-1)=\frac{-3}{2}$

2) الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[-1,1]$ لأنها دالة كثيرة حدود

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-1,1]$ و لدينا $f'(x)=12x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$

$f'(x)$ ينعدم عند $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ مغيرا إشارته بجوارهما و بالتالي f ليست رتيبة على المجال $[-1,1]$

$f(-1)\times f(-\frac{1}{2})<0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ للمعادلة $f(x)=0$

$f(-\frac{1}{2})f(0)<0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد β على المجال $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ للمعادلة $f(x)=0$

• $f(0)f(\frac{1}{2})<0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد γ للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $[0,1]$ و بالتالي نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في $[-1,1]$

تطبيق 17 دراسة استمرار دالة

f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2) هل الدالة f مستمرة عند الصفر على $\mathbb{R}$ ؟

✓ الحل :

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq 1$ ومنه $-x^2\leq x^2\cos\frac{1}{x}\leq x^2$

و بما ان $\lim\limits_{x\to 0} x^2=\lim\limits_{x\to 0}-x^2=0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

2) بما أن الدالة f معرفة عند الصفر و f لها نهاية وحيدة عند الصفر

فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ وعليه فإن الدالة f مستمرة عند 0

الدالتان $x\xrightarrow{g}\frac{1}{x}$ و $x\xrightarrow{h}\cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}^*$

و بالتالي الدالة المركبة hog مستمرة على $\mathbb{R}^*$ $(hog(x)=\cos\frac{1}{x})$

الدالة $x\to x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن جداء الدالتين $x\to x^2$ و hog مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و عليه فإن f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمارين و مسائل

1- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=-3x^4+5$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) $f(x)=-x^4-x^2-x+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) $f(x)=\dfrac{-x+5}{2x+1}$ عند $+\infty$, $-\infty$, $-\dfrac{1}{2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ عند $-\infty$, $+\infty$

5) $f(x)=-5x+4+\dfrac{1}{2x+1}$ عند $-\infty$, $+\infty$, $-\dfrac{1}{2}$

6) $f(x)=\dfrac{3x^2}{(x-3)(1-x)}$ عند $-\infty$, $+\infty$, 3 , 1

7) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty$, $+\infty$, 4 , 1

2- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}$ عند $-\infty$, $+\infty$, -1 , $+\dfrac{1}{2}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ ، -2 ، 2

3) $f(x)=\dfrac{x-3}{x\sqrt{x-3}}$ عند $+\infty$ و 3

4) $f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x^2+|x|-2}$ عند $+\infty$, $-\infty$, -1 , 1

3- أدرس نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية ،

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ عند $-\infty$, $+\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+4}-2x+1$ عند $-\infty$, $+\infty$

3) $f(x)=\dfrac{-x+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}$ عند 0 , $+\infty$

4- f و g دالتان معرفتان على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ بالعبارتين ،

$f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$

برهن أن $f(x)\times g(x)=-4$ وما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ ؟ وما هي ايضا نهاية f عند $(-\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(-\infty)$ ؟

5- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2+3}{x^2}$ بين الجمل الصحيحة من الخاطئة

برر ذلك :

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ، ب) الدالة f زوجية ، جـ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

د) $f(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم ، هـ) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=6$

6- أحسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{\tan(x)}{x}$ عند 0 ، 2) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ عند 0

3) $f(x)=\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ عند 0 مع α و β حقيقيان غير معدومين

4) $f(x)=\dfrac{\tan x+\sin x}{x^3}$ عند 0 ، 5) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x}$ عند 0

7- أحسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ عند $\dfrac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ عند 0

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$ عند 0

4) $f(x)=\dfrac{1}{\cos 2x}-\tan 2x$ عند $\dfrac{\pi}{4}$

8- بين أن $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ عند 0

9- أوجد نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد عددا حقيقيا α بحيث إذا كان $x\in]-\alpha,1+\alpha[$ فإن $f(x)>10^3$

10- عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$

ثم أوجد عددا حقيقيا A بحيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)\in]1,4\ ,\ 1,6[$

11- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^2 x-x+1$

1) لماذا لا يمكن تطبيق القواعد العملية في حساب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$ ؟

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $-x+1\le f(x)\le -x+2$

ثم استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

12- بين أنه من أجل كل $x>-1$ لدينا $\frac{-1}{x+1}<\frac{\cos x}{x+1}<\frac{1}{x+1}$

ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

13- f دالة معرفة على $]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+\cos x}{x-2}$ بين أنه من أجل كل $x>2$ لدينا $\frac{3x+1}{x-2}\ge f(x)\ge\frac{3x-1}{x-2}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

14- f دالة بحيث من أجل كل $x>0$ ، $f(x)\ge\frac{1}{3}x^2+1$ ما هي نهاية f عند $(+\infty)$ ؟

15- عين نهاية الدوال f ، g ، h عند $-\infty$ و $+\infty$ باستعمال نظرية الحصر

$h(x)=-x+1+\sin x$ ، $g(x)=x^2+3+\cos x$ ، $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$

16- f دالة بحيث من أجل كل $x\ge 0$: $|f(x)-4|\le\frac{2}{x+1}$ ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟

17- أدرس النهايات عند $-\infty,+\infty,-\frac{1}{2}$ للدالة f المعرفة $f(x)=\frac{-3x}{2x+1}$

ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة و كذا الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

18- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم معطى و (d) مستقيم معادلته $y=x-3$ عين الجمل الصحيحة من بين الجمل الآتية :

أ) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-3$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

جـ) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=+\infty$

د) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإنه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

هـ) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) فإن $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل التالي :

$f(x)=\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+1}$

19- f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$ و منحناها البياني (C_f).

أوجد منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f).

20- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1) احسب نهاية f عند $-\infty,+\infty$

2- أ) اكتب $4x^2-4x+3$ على الشكل النموذجي

ب) أدرس النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة g المعرفة بـ $g(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$

جـ) استنتج أن المنحنى الممثل للدالة f له مستقيمان مقاربان مائلان يطلب تعيينهما ثم بين أن (C_f) يقع فوق كل منهما.

21- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=-x^3+3x+1$

1) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في كل مجال من المجالات التالية :

$[1,2]$, $[-1,1]$, $[-2,-1]$

22- إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+3x^2-2$

لماذا للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول مختلفة على $\mathbb{R}$ ؟

23- 1) بين أن المعادلة $-x^3-x+4=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$

أعط حصرا لهذا الحل بتقريب 0.001

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a المعادلة $-x^3-x+4=a$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$

24 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=2\sin x-x$

إذا علمت أنها متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

استنتج عدد حلول المعادلة $\sin x=\frac{x}{2}$ على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-\pi,0]$

ثم بين أن هذه الحلول وحيدة في $\mathbb{R}$

25 - f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=a \end{cases}$

1) ما هي القيم التي يأخذ ها a حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

26 - f دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(x)\in I$

g الدالة المعرفة على I بـ $g(x)=f(x)-x$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة على الدالة g بين أنه يوجد عدد حقيقي a من I بحيث $f(a)=a$.

الدرس 3

الاشتقاقية ودراسة الدوال

1 - تعاريف (تذكير)

D_f مجموعة تعريف الدالة f و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - 1 العدد المشتق و الدالة المشتقة

تعريف 1

f دالة معرفة على مجال I و a عدد منه

عندما نقول أن ℓ هو العدد المشتق للدالة f عند a نعني أن أحد الشرطين التاليين محقق.

الشرط الأول :

الدالة $h\mapsto\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لها نهاية ℓ عند 0.

الشرط الثاني :

الدالة $x\mapsto\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية ℓ عند a.

و نرمز إلى العدد المشتق لـ f عند a بـ $f'(a)$

إذا قبلت الدالة f عددا مشتقا عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a.

و إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد من مجال I محتوى في D_f

نقول أن f قابلة للاشتقاق على I.

تعريف ❷

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المشتقة للدالة f على المجال I هي الدالة التي نرمز لها بـ f' و التي ترفق بكل x من I العدد $f'(x)$

ملاحظة

1) يمكن كتابة $f'(x)=\frac{df}{dx}$ و تسمى الكتابة التفاضلية لـ f' .

2) تعريف f' ليس مقتصرا على مجال واحد بل يمكن تعريفها على اتحاد مجالات.

مثال - ◆

الدالة المشتقة للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ المعرفة على $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ هي الدالة f' حيث $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$.

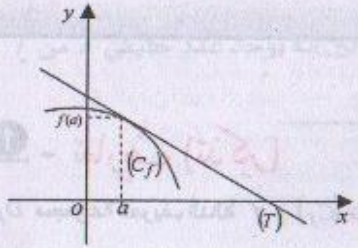
1 - 2 المماس لمنحني عند نقطة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a

المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(a,f(a))$

هو المستقيم (T) المار بـ A و معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته هي:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

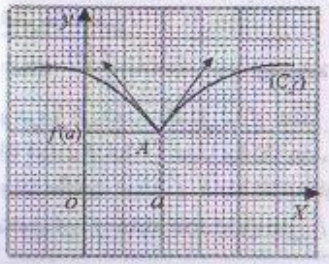


1 - 3 المشتق من اليمين و من اليسار عند عدد معين

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a

- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_1 من اليمين عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق من اليمين عند a .

- إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية ℓ_2 من اليسار عند a نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند a .



التفسير الهندسي

التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a,f(a))$ معامل توجيهه ℓ_1

و يقبل أيضا نصف مماس من اليسار عند A معامل توجيهه ℓ_2 .

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a و النقطة A تسمى نقطة زاوية.

مثال - ◆

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+2}{|x-1|+3}$

1) ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 1 ، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_1) .

2) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 1 ، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_2) .

✓ الحل

1) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يمين 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ تقبل نهاية حقيقية لما x يؤول إلى 1 بقيم أكبر.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{3x+2}{x+2}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{9x+6-5x-10}{3(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{4(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يمين الواحد وبالتالي f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1 و العدد المشتق من اليمين هو $\ell_1=\frac{4}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يمين A هي :

$(T_1): y=\frac{4}{9}(x-1)+\frac{5}{3}$ ، $x \geq 1$

2) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يسار 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية لما x يؤول إلى 1 من اليسار.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{3x+2}{-x+4}-\frac{5}{3}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} = \ell_2$$

النسبة $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ لها نهاية حقيقية على يسار 1 بالتالي f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 1 و العدد المشتق من اليسار هو $\ell_2=\frac{14}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يسار A هي :

$(T_2): y=\frac{14}{9}(x-1)+\frac{5}{3}$ ، $x \leq 1$

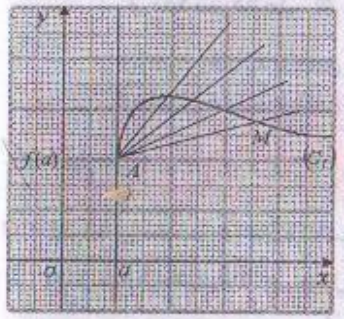
بما ان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1

و النقطة $A(1,\frac{5}{3})$ هي نقطة زاوية.

1 - 4 المماس العمودي لمنحن

إذا كانت f مستمرة عند a و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$

فإن المنحني (C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة $A(a\,,\,f(a))$.



التفسير الهندسي •

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ حيث f مستمرة عند a

تعني أن معاملات توجيه المستقيمات المارة من A و القاطعة لـ (C_f) تؤول إلى $(+\infty)$.

إذن هذه المستقيمات تؤول إلى المستقيم ذي المعادلة $x=a$.

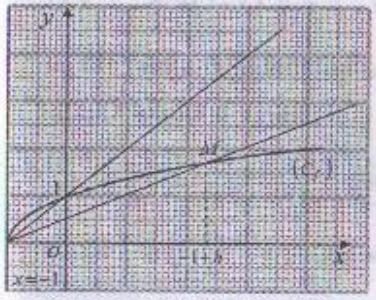
مثال - ◆

f دالة معرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

✓ **الحل**

من أجل $h>0$ لدينا $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$



و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1.

و بما أن النسبة تؤول إلى $(+\infty)$ لما h يؤول إلى الصفر فإن معامل توجيه المستقيم (AM) يصبح كبيرا جدا.

إذن المماس لـ (C_f) عند $A(-1,0)$ عمودي و معادلته هي $x=-1$.

1 - 5 التقريب التآلفي و طريقة أولر

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h مع $x+h\in I$.

لدينا $f(x+h)=f(x)+h\times f'(x)+h\,\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

نتحصل هكذا على التقريب $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ لما h يقترب من الصفر.

نسمي $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h صغير جدا.

الإثبات

ليكن x عددا حقيقيا من I ، بما أن f قابلة للاشتقاق عند x فإن

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{x}=f'(x)$

بوضع $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ يكون:

$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x)-f'(x)=0$ ينتج مما سبق:

$f(x+h)-f(x)=h\times f'(x)+h\varepsilon(h)$ (1)

بوضع $\Delta x=x+h-x=h$

و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$

العلاقة (1) تكتب:

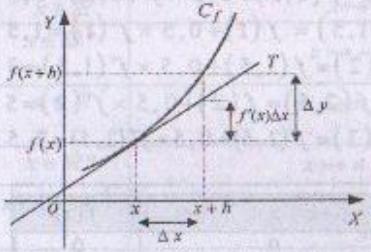
$\Delta y=(\Delta x)f'(x)+(\Delta x)\,\varepsilon(\Delta x)$

و منه التقريب $\Delta y\approx(\Delta x)f'(x)$

هذا التقريب يقودنا إلى الكتابة الرمزية

$dy=f'(x)dx$

و تسمى هذه الأخيرة بالكتابة التفاضلية.

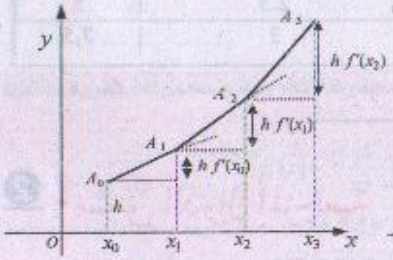


طريقة أولر

في كثير من المسائل يحدث و أن نعرف الدالة المشتقة f' للدالة f و قيمة لـ f عند عدد (شرط أولي $y_0=f(x_0)$) بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f.

تسمح لنا طريقة أولر بإنشاء منحن تقريبي للدالة f ،

لذلك نعتمد على فكرة انه من أجل h قريب من الصفر يكون $f(x+h)$ قريب من $f(x)+h\times f'(x)$.



بما أن لدينا $f(x_0)=y_0$ نستطيع أن نعلم نقطة من المنحنى البياني لـ f و هي $A_0(x_0,y_0)$.

نختار عددا حقيقيا h غير معدوم و قريب من الصفر

و بما أننا نعرف $f'(x_0)$ ننشئ النقطة A_1 ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ التي تنتمي إلى المستقيم المار من A_0 و معامل توجيهه $f'(x_0)$ يكون ترتيبها $y_1=f(x_0)+h\times f'(x_0)$

بما أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ لما h يقترب من الصفر فإن A_1 قريبة من (C_f).

بنفس الطريقة و ابتداء من A_1 نستطيع إنشاء النقطة $A_2(x_1+h\ ,\ f(x_1)+h\,f'(x_1))$ و هكذا نعلم النقط A_n التي إحداثياتها $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=f(x_{n-1})+h\,f'(x_{n-1})$ مع $n\geq 1$.
وتسلسل القطع $[A_0\,A_1]$ ، $[A_1\,A_2]$ ،... يعطي لنا تمثيلا بيانيا مقربا لـ (C_f) و هذا التمثيل متعلق بالخطوة h و كلما كانت h صغيرة جدا كلما كان المنحنى دقيقا بالقدر الكافي.

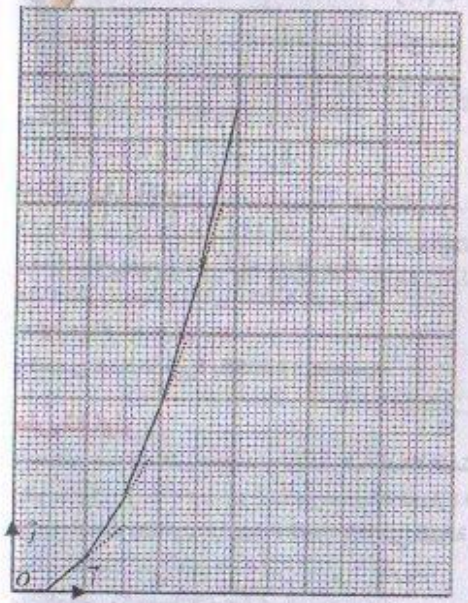
مثال - ◆

لتكن f دالة معرفة بـ $f(0)=0$ و $f'(x)=2x$ ، باستعمال طريقة أولر و بأخذ خطوة $p=0{,}5$ أنشئ جدول القيم المقربة لـ $f(x)$ من أجل كل x من $[0\,;3]$ ثم أنشئ منحنى تقريبي لـ f على هذا المجال.

✓ الحل

$$f(0{,}5)=f(0)+0{,}5\times f'(0)=0$$
$$f(1)=f(0{,}5)+0{,}5\times f'(0{,}5)=0{,}5$$
$$f(1{,}5)=f(1)+0{,}5\times f'(1)=1{,}5$$
$$f(2)=f(1{,}5)+0{,}5\times f'(1{,}5)=3$$
$$f(2{,}5)=f(2)+0{,}5\times f'(2)=5$$
$$f(3)=f(2{,}5)+0{,}5\times f'(2{,}5)=7{,}5$$

x	$f(x)$
0	0
0,5	0
1	0,5
1,5	1,5
2	3
2,5	5
3	7,5



2 - مشتق الدوال المرجعية

2 - 1 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على D (D مجال أو إتحاد مجالات) و k عدد حقيقي
إذن الدوال kU ، $U+V$ و $U\times V$ قابلة للاشتقاق على D و لدينا:

$$(kU)'=kU' \quad ,\quad (U+V)'=U'+V' \quad \text{و} \quad (U\times V)'=U'V+U\times V'$$

و إذا كانت V غير معدومة على D فإن $\frac{U}{V}$ و $\frac{1}{V}$ قابلتان للاشتقاق على D و لدينا :

$$\left(\frac{1}{V}\right)'=\frac{-V'}{V^2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-V'U}{V^2}$$

ملاحظة

الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

جدول مشتقات الدوال الشهيرة.

الدالة	الدالة المشتقة	تعاليق
$x\mapsto k$ (ثابت)	$x\mapsto 0$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto 1$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x\in\mathbb{R}^*$
$x\mapsto x^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto n\,x^{n-1}$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n$ مع $n\in\mathbb{Z}_-^*$	$x\mapsto n\,x^{n-1}$	$x\in\mathbb{R}^*$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in]0,+\infty[$
$x\mapsto \sin x$	$x\mapsto \cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto \cos x$	$x\mapsto -\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
$x\mapsto a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$	$x\mapsto na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2 x+a_1$	$x\in\mathbb{R}$

تمرين تدريبي

من أجل كل دالة من الدوال التالية عين مجموعة تعريفها و مجموعة تعريف دالتها المشتقة ثم عين دالتها المشتقة .

1) $f(x)=2x^3+5x-1$ ، 2) $g(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2+3x}$

3) $h(x)=\frac{1}{x^2-x+3}$ ، 4) $k(x)=x^2\sin x$

✓ الحل

1) الدالة f هي دالة كثيرة حدود معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=6x^2+5$

2) الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2+3x\neq 0$.

$x^2+3x\neq 0$ يكافئ $(x\neq 0)$ و $(x\neq -3)$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{0,-3\}$

و بما أن g دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على D_g و من أجل كل x من D_g لدينا :

$$g'(x)=\frac{(4x-1)(x^2+3x)-(2x+3)(2x^2-x+1)}{(x^2+3x)^2}=\frac{7x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^2-x+3>0$ و منه مجموعة تعريف الدالة h هي $\mathbb{R}$

و بما أن الدالة h ناطقة فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=\frac{-(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

4) الدالتان $x\xrightarrow{v}x^2$ و $x\xrightarrow{u}\sin x$ معرفتان و قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و بالتالي الدالة $K=U\times V$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $K'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$.

3 - تطبيقات الاشتقاق

3 - 1 اتجاه التغير

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I محتوى في D_f .

- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة

إذا انعدمت f' عند بعض القيم من المجال I و لا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على تغيراتها.

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$.

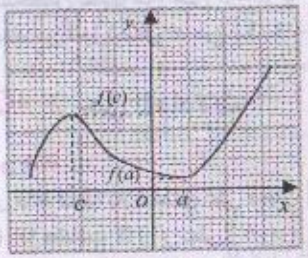
إذن الدالة f' موجبة على $\mathbb{R}$ و تنعدم عند 0 وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - 2 القيم الحدية لدالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل c .

القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل c بحيث من أجل كل x من J لدينا $f(x)\leq f(c)$. $(f(x)\geq f(c))$

مبرهنة



f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل c .

إذا انعدمت $f'(x)$ عند c مغيرة إشارتها في جوار c فإن $f(c)$ هي قيمة حدية و المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(c,f(c))$ يكون أفقيا.

تمرين تدريبي ❶

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2,3]$ بالشكل $f(x)=x^3-3x^2+2$ و استنتج القيم الحدية لـ f على هذا المجال ثم اعط حصرا لـ $f(x)$ على المجال السابق.

✓ الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,3]$ و من أجل كل x من $[-2,3]$ لدينا $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ او $(x=2)$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول المجاور

- إذا كان $x\in]0,2[$ فإن $f'(x)<0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $[0,2]$

- إذا كان $x\in]-2,0[$ او $x\in]2,3[$ فإن $f'(x)>0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2,0]$ و $[2,3]$

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		0		2		3
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	
تغيرات الدالة f	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

$f(-2)=18$ ، $f(0)=2$ ، $f(2)=-2$ ، $f(3)=2$

$f(0)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2,2]$

$f(3)=2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0,3]$

$f(-2)=-18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2,2]$

$f(2)=-2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0,3]$

$-18=f(-2)$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2,3]$
العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة f على مجال $[-2,3]$
و نتحصل عليها من اجل $x=0$ و $x=3$
ومنه من اجل كل x من $[-2,3]$ يكون $-18 \le f(x) \le 2$.

3 - 3 حل المعادلات

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I=[a,b]$

1) إذا كانت $f'(x)>0$ على $[a,b]$ فإن من اجل كل k من $[f(a),f(b)]$، المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال I.

2) إذا كانت $f'(x)<0$ على $[a,b]$ فإن من اجل كل k من $[f(b),f(a)]$، المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد في المجال I.

ملاحظة

نتائج المبرهنة تبقى صحيحة حتى و لو انعدمت f' عند بعض القيم من I.

تمرين تدريبي ❶

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3-3x+1$.

1) عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول ثم اعط حصرا بتقريب 10^{-3} للحل الذي ينتمي إلى $]-2,-1[$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f'(x)<0$

و منه f متناقصة تماما على $[-1,1]$.

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$

و منه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ ، $]+1,+\infty[$

و اليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$+3$	↘		↗	$+\infty$

بما ان f متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$ و صورة هذا المجال هي $]-\infty,3]$ و الصفر ينتمي الى $]-\infty,3]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

و كون $f(-2)=-1$ يكون $\alpha\in]-2,-1[$.

لتعيين حصر لـ α بتقريب 10^{-3} نتبع طريقة ديكتومي.

$m=\frac{a+b}{2}=-1,5$ و $f(m)=0,125$ إذن $\alpha\in]-2,-1,5[$

$m'=\frac{-2-1,5}{2}=-1,75$ و $f(m')=0,89$ إذن $\alpha\in]-2,-1,75[$

$m''=-1,875$ و $f(m'')=0,033$ إذن $\alpha\in]-2,-1,87[$

$m'''=-1,9375$ و $f(m''')=-0,46$ إذن $\alpha\in]-1,937,-1,87[$

بما أن f متناقصة تماما على $]-1,1[$ و صورة هذا المجال هي $]-1,3[$ و الصفر ينتمي إلى $]-1,3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β

بنفس الطريقة نبين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1,+\infty[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول.

3 - 4 استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات

نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين بعض النهايات.

إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a

فإن $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

مثال - ◆

1) $g(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، نريد حساب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

بوضع $f(x)=\cos x$ نجد $f(0)=1$ بالتالي $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

لكن f قابلة للاشتقاق عند الصفر إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-\sin x$

ومنه نجد $f'(0)=0$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=f'(0)=0$

2) $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ نريد حساب $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

بوضع $f(x)=\sin x$ نجد $f(0)=0$ بالتالي $h(x)$ تكتب $h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=\cos x$

و منه نجد $f'(0)=1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=f'(0)=1$.

4 ـ مشتق دالة مركبة

4 - 1 نظرية أساسية

مبرهنة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على مجال J وكانت U دالة قابلة للاشتقاق على I

و من اجل كل x من I لدينا $U(x)\in J$.

فإن الدالة المعرفة بـ $f(x)=g(U(x))$ قابلة للاشتقاق على I

و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=U'(x)g'(U(x))$

الإثبات

لكي نبرهن على ان f قابلة للاشتقاق على I

يجب ان نبرهن أن الدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

لها نهاية عند a هي $U'(a)g'(U(a))$ حيث a كيفي من I

ـ نفرض انه من اجل كل x بجوار a و يختلف عنه $U(x)\neq U(a)$

و عليه من أجل كل x من هذا الجوار يمكن كتابة

$$h(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}\times\frac{U(x)-U(a)}{x-a}$$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a إذن $\lim\limits_{x\to a}\frac{U(x)-U(a)}{x-a}=U'(a)$.

بوضع $t(x)=\frac{g(U(x))-g(U(a))}{U(x)-U(a)}$ و $U(x)=X$ يكون $t(x)=\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a

إذن $X=U(x)=U(a)+(x-a)U'(a)+(x-a)\varepsilon(x)$ مع $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to a} X=U(a)$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(X)-g(U(a))}{X-U(a)}=g'(U(a))$

لأن g قابلة للاشتقاق عند $U(a)$.

إذن $\lim\limits_{x\to a} h(x)=g'(U(a))\times U'(a)$ و منه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=U'(a)g'(U(a))$.

ملاحظة

1) المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذ كان I و J عبارة عن اتحاد مجالات

2) نستطيع كتابة $(g(U(x)))'=\frac{d(gou)}{dx}=\frac{dg}{dU}\times\frac{dU}{dx}$

تمرين تدريبي 1

- عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$f_1(x)=(x^2+1)^3$ ، $f_2(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $f_3(x)=\cos\frac{1}{x}$

الحل

f_1 ، f_2 ، f_3 هي دوال مركبة من الشكل gou و في كل حالة لابد من معرفة g و U

- نضع $f_1=g_1ou_1$ حيث $g_1(x)=x^3$ و $u_1(x)=x^2+1$

الدالتان u_1 و g_1 قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن حسب المبرهنة السابقة الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ($I=J=\mathbb{R}$).

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u_1'(x)=2x$ و $g_1'(x)=3x^2$

إذن $f_1'(x)=2x(3)(x^2+1)^2=6x(x^2+1)^2$

- نضع $f_2=g_2ou_2$ حيث $u_2(x)=x^2+1$ و $g_2(x)=\sqrt{x}$ و $J=]0,+\infty[$ ، $I=\mathbb{R}$.

الدالة u_2 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالة g_2 قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل x من I فإن $U(x)\in J$.

من اجل كل x من J لدينا $g_2'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و من اجل كل x من I لدينا $u_2'(x)=2x$

إذن $f_2'(x)=2x\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- نضع $f_3=g_3ou_3$ حيث $u_3(x)=\frac{1}{x}$ و $g_3(x)=\cos x$ و $I=\mathbb{R}^*$ ، $J=\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $U(x)\in J$.

الدالة u_3 قابلة للاشتقاق على I و لدينا $u_3'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

الدالة g_3 قابلة للاشتقاق على J و لدينا $g_3'(x)=-\sin x$.

إذن $f_3'(x)=u_3'(x)\,g_3'(u_3(x))=\frac{1}{x^2}\times\sin(\frac{1}{x})$

4 - 2 مشتق الدالة العكسية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما و قابلة للاشتقاق على I و كانت $f'(x)$ لا تنعدم على I فإن الدالة العكسية g للدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $J=f(I)$ و لدينا

$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ مع $y=f(x)$.

الإثبات

من اجل كل x من I لدينا $(g\circ f)(x)=x$

و منه من اجل كل x من I يكون $(g\circ f)'(x)=1$

و لكون $(g\circ f)'(x)=f'(x)g'(f(x))$ ينتج $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.

بما أن $y=f(x)$ فإن $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ من اجل كل y من J .

نرمز إلى الدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} .

تمرين تدريبي 1

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=3x^2+6x$

1) اثبت ان f تقابل من المجال $]-\infty,-1]$ في المجال $[-3,+\infty[$

2) احسب بطريقتين مختلفتين $(f^{-1})'(0)$

✓ الحل

1) الدالة f مستمرة على مجال $]-\infty,-1]$ لأنها دالة كثيرة حدود.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود و لدينا $f'(x)=6x+6$

من اجل كل x من $]-\infty,-1]$ لدينا $f'(x)<0$

و منه f متناقصة تماما على $]-\infty,-1]$

بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty,-1]$

فهي تقابل من $]-\infty,-1]$ في $[-3,+\infty[=([-\infty,-1])f$ و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1}

2) حساب $(f^{-1})'(0)$ باستعمال التعريف

من اجل كل y من $]-3,+\infty[$ لدينا $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ حيث $y=f(x)$.

$y=0$ معناه أن $3x^2+6x=0$ و منه نجد $x=0$ او $x=-2$

$x=0$ مرفوض لأن $0\notin]-1,+\infty[$ و بالتالي قيمة x المقبولة هي -2

إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{-6}$

- حساب $(f^{-1})'(0)$ بتعيين عبارة f^{-1}

من أجل كل x من I و من اجل كل y من $f(I)$:

$y=f(x)$ يكافئ $3x^2+6x-y=0$

(I) ... $3x^2+6x-y=0$

ليكن Δ مميز للمعادلة (I) ذات المجهول x .

$\Delta=6^2-4(3)(-y)=36+12y$

بما أن $y>-3$ فإن $\Delta>0$ وبالتالي المعادلة (I) لها حلان مختلفان x_1 و x_2

حيث $x_1=\frac{-6+\sqrt{12y+36}}{6}$ ، $x_2=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$.

من اجل كل $y\geq 0$ يكون $x_1>0$ و بالتالي x_1 لا ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ و عليه x_2 مقبول

إذن $x_2=f^{-1}(y)=\frac{-6-\sqrt{12y+36}}{6}$.

الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و لدينا $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{9+3x}}$

إذن $(f^{-1})'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}$

4 - 3 مشتق الدالة الجذرية $\sqrt{u}$ و الدالة u^n مع $n\in\mathbb{Z}^*$

مبرهنة 1

u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I .

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجال I

و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

الإثبات

بوضع $g(x)=\sqrt{x}$ يمكن كتابة f على الشكل gou و بتطبيق قاعدة مشتق الدالة المركبة نجد $(gou)'(x)=u'(x)g'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$

ملاحظة

لمعرفة إن كانت الدالة $f=\sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $u(x_0)=0$ ندرس نهاية النسبة $t(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما x يؤول إلى x_0 .

مثال - ◆

1) f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $D_f=[2,+\infty[$

يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $U(x)=x-2$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ و يبقى لنا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$

لذلك ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ لما x يؤول إلى 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 . وبالتالي f قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$

2) f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{(x+1)^4}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

الدالة f تكتب على الشكل $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=(x+1)^4$ و $u(-1)=0$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و بالتالي f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ لكن $f(x)=(x+1)^2$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

مبرهنة ❷

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و n عدد صحيح غير معدوم.

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=(u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا $f'(x)=n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$.

الإثبات

- حالة $n\in\mathbb{N}$:

بوضع $g(x)=x^n$ يمكن كتابة f على الشكل gou

من أجل كل x من I لدينا $g'(x)=nx^{n-1}$ و منه $g'(u(x))=nu^{n-1}(x)$.

إذن من أجل كل x من I لدينا $f'(x)=n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$.

- حالة n عدد صحيح سالب و $u(x)$ غير معدوم على I

$$f(x)=(u(x))^n=\frac{1}{(u(x))^{-n}}$$

بما أن $-n>0$ فإن حسب الحالة الأولى:

$\left[(u(x))^{-n}\right]'=(-n)u'(x)(u(x))^{-n-1}$ و بتطبيق قاعدة مشتق القسمة نجد :

$f'(x)=\frac{n\,u'(x)(u(x))^{-n-1}}{(u(x))^{-2n}}$ بالتبسيط نجد :

$f'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$.

مبرهنة ❸

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

إذن الدالتان $\cos u$ و $\sin u$ قابلتان للاشتقاق على I

و لدينا $(\cos u)'=-u'\sin u$ و $(\sin u)'=u'\cos u$

الإثبات

الدالة $\cos u$ من الشكل vou حيث $v(x)=\cos x$ ، v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x)=-\sin x$ منه $(\cos u(x))'=-\sin u(x)\times u'(x)$

بنفس الكيفية نثبت العلاقة الثانية

مثال - ◆

$$(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$$

و $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f

1) أ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ، ب) $f(x)=(2x^2+x)^4$

ج) $f(x)=\sin^2 x$ ، د) $f(x)=\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

✓ الحل

1) يمكن كتابة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ مع $u(x)=x^2+x+1$

الدالة f معرفة إذا كان $u(x)\geq 0$

لكن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)\geq 0$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

ب) يمكن كتابة $f(x)=(u(x))^4$ حيث $u(x)=2x^2+2$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=4(4x+1)(2x^2+x)^3$

جـ) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^2$ مع $u(x) = \sin x$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)$.

د) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{(u(x))^2}$ مع $u(x) = x^2+x+1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x) \rangle 0$

الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$

4 - 4 المشتقات المتتابعة لدالة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I . فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f

و إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـ f'' أو $f^{(2)}$

و هكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة

حيث $n \geq 2$ على المجال I فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f نرمز لها بـ $f^{(n)}$ و نكتب :

من أجل كل $n \geq 2$ ومن أجل كل x من I لدينا $f^{(1)}(x) = f'(x)$ و $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

ملاحظة

في الحركيات لما $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك على خط مستقيم من اللحظة الابتدائية حتى اللحظة t فان العددين $f'(t)$ ، $f''(t)$ يمثلان على التوالي السرعة اللحظية و التسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة t حيث :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} \quad \text{و} \quad f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2}$$

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^4$

الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة

و انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f^{(1)}(x) = 4x^3$ ، $f^{(2)}(x) = 12x^2$ ، $f^{(3)}(x) = 24x$ ، $f^{(4)}(x) = 24$

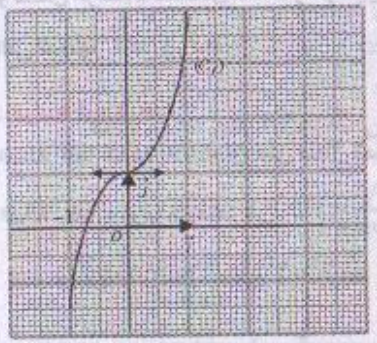
و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x) = 0$

4 - 5 نقطة الانعطاف

إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I

و كانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 فإن المنحني البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f) .

مثال -



f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = 3x^3 + 1$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x) = 9x^2$ و $f''(x) = 18x$.

$f''(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

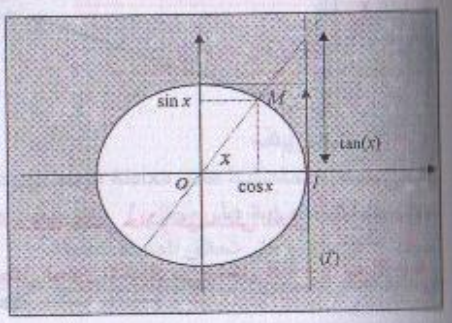
$f''(x)$ ينعدم عند $x_0 = 0$ مغيرا إشارته في جوار 0 و منه النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5 - دالة الظل tan

دالة الظل التي نرمز لها بـ tan معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

مع k عدد صحيح واليك بعض قيم tan من أجل قيم شهيرة لـ x .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



خواص :

1) من اجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$\tan(x+\pi) = \tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة tan دورية و دورها π .

2) من اجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ لدينا $\tan(-x) = -\tan x$ نقول عندئذ أن الدالة tan فردية

- التمثيل البياني للدالة tan

النقطتان ذاتا الإحداثيات $(x, \tan x)$ و $(-x, \tan(-x))$ تنتميان إلى (γ) منحنى الدالة tan و متناظرتان بالنسبة إلى المبدأ O

إذن (γ) يقبل O كمركز تناظر له و لإنشاء المنحنى (γ) نرسمه أولا في مجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

و نكمل الرسم باستعمال التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O و بالإنسحابات المتوالية

التي أشعتها $\pi\vec{i}$ و $-\pi\vec{i}$

- دراسة الدالة tan

الدالة tan قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $(\tan x)' = 1 - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

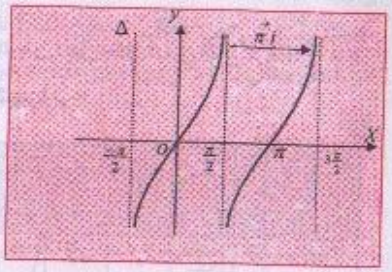
الدالة tan متزايدة تماما لأن $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ و $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$

المستقيمات ذات المعادلة $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ مقاربة عمودية لـ (γ).

و إليك جدول تغيرات tan على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ و منحناها البياني:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$		$+$		$+$	
$\tan x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



خاصية :

1) من أجل كل عدد حقيقي a المعادلة $\tan x = a$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2) إذا كان α حلا للمعادلة $\tan x = a$ فإن كل الحلول الأخرى من الشكل $\alpha + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين تدريبي

1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ بالعبارة $f(x) = \tan x - 2x$

ب) برهن أن لـ (C_f) له مستقيما مقاربا عموديا ثم ارسم (C_f)

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I هما :

$x \mapsto \tan x$ ، $x \mapsto -2x$

و من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = -1 + \tan^2 x$

$f'(x)$ تكتب على شكل $f'(x) = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$.

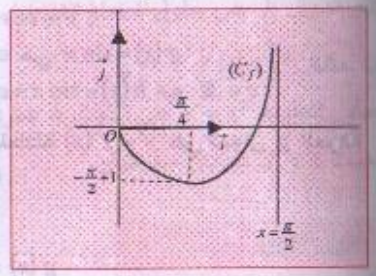
من أجل كل x من I لدينا $\tan x + 1 > 0$.

إذا كان $\frac{\pi}{4} > x > \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x - 1 > 0$ و إذا كان $0 < x < \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x - 1 < 0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$ ، $f(0) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

ب) بما أن $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لـ (C_f)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	$+\infty$



6 - المعادلات التفاضلية

6 - 1 تعريف

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة و مشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق n مرة على I حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق إلى المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$ مع f دالة مألوفة .

6 - 2 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

نضع $y' = f(x)$... (1)

إذا كانت g حلا للمعادلة (1) فإن $g'(x) = f(x)$

إذا كان h حلا آخر للمعادلة (1) فإن $h'(x) = f(x)$

و منه نستنتج $g'(x)=h'(x)$ اي $h(x)=g(x)+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=x^2$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=x^2$

الدالة g التي مشتقتها يساوي x^2 هي $\frac{1}{3}x^3$

و منه المعادلة $y'=x^2$. حلولها من الشكل $h(x)=\frac{1}{3}x^3+c$.

- في حالة $f(x)=\sqrt{x}$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sqrt{x}$.

الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي مشتقتها يساوي $\sqrt{x}$ هي $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

و بالتالي حلول المعادلة $y'=\sqrt{x}$ هي $h(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=\sin x$ المعادلة (1) تصبح $y'=\sin x$.

الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\sin x$ هي $g(x)=-\cos x$

و منه حلول المعادلة $y'=\sin x$ هي $h(x)=-\cos x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)=\cos x$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y'=\cos x$.

الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي مشتقتها تساوي $\cos x$ هي $g(x)=\sin x$

و منه حلول المعادلة $y'=\cos x$ هي الدوال h حيث $h(x)=\sin x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)$ كثير حدود من الدرجة n .حلول المعادلة $y'=f(x)$ هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $g(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n+1)$.

إذا كان $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ فإن:

$$g(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0 x+c$$

لأن من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$

و منه الدوال g هي حلول المعادلة $y'=f(x)$.

مثال. ◆

1) $y'=x^2+x+1$ (1)

حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c$ و $c\in\mathbb{R}$.

3 - 6 المعادلة التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$.

لحل المعادلة $y''=f(x)$ نتبع ما يلي:

نبحث عن حلول المعادلة $K'=f(x)$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $y'=K(x)$ لأن:

$y''=(y')'=(K(x))'=f(x)$.

- حالة $f(x)=\cos x$

حلول المعادلة $K'=f(x)$ هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\sin x+c$

حلول المعادلة $y'=\sin x+c$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-\cos x+cx+d$

حيث c و d عددان حقيقيان كيفيان.

إذن الدوال h هي حلول المعادلة $y''=\cos x$.

- حالة $f(x)=\sin x$

بنفس الكيفية السابقة نجد حلول هذه المعادلة التي هي الدوال من الشكل:

$h(x)=-\sin x+cx+d$.

- حالة $f(x)=\sqrt{x}$

حلول المعادلة $K'=\sqrt{x}$ هي الدوال g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

حلول المعادلة $y'=K$ هي الدوال h المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{4}{15}x^2\sqrt{x}+cx+d$

إذن الدوال h هي حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sqrt{x}$.

- حالة $f(x)=x^2$

حلول المعادلة $y''=x^2$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$

حيث c و d عددان حقيقيان.

تمرين تدريبي

عين الحل الخاص للمعادلة $y''=x^2$ الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(1)=2$

✓ الحل

حلول المعادلة التفاضلية $y''=x^2$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$h(x)=\frac{1}{12}x^4+cx+d$.

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x)=\frac{1}{3}x^3+c$

$y(0)=1$ يكافئ $d=1$

$y'(1)=2$ يكافئ $\frac{1}{3}+c=2$ يكافئ $c=\frac{5}{3}$.

إذن الحل الخاص المطلوب هو $h(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{5}{3}x+1$.

7 ـ البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = y$

مثال ـ ◆

نعتبر المعادلة $y' = y$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(0) = 1$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f(0) = 1$
و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = f(x)$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[0,1]$ بخطوة $h = \frac{1}{n}$
حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
نعرف المتتالية (x_n) بـ $x_p = x_{p-1} + h$ و $x_0 = 0$ و $x_n = 1$.
و نحسب القيم المقربة y_1 ، y_2 ، y_n للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ $f(x_n)$
بواسطة التقريب التالفي للدالة f.
بما أن $f(0) = 1$ فإننا نضع $y_0 = 1$.

1) احسب y_1

2) أ ـ اوجد علاقة تربط بين y_{k+1} و y_k ثم استنتج عبارة y_k بدلالة k.

ب ـ نفرض أن $n = 10$ احسب قيم y_k حيث $n \geq k \geq 1$.

جـ ـ أنشئ المنحنى التقريبي لحل المعادلة $y' = y$ على المجال $[0,1]$.

✓ الحل

1) لدينا $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$
و بما أن $f'(x) = f(x)$ من اجل كل x من $[0,1]$ فإن :
$f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1+h) = 1 + h = 1 + \frac{1}{n}$ إذن $y_1 = f(x_0)(1+h)$.

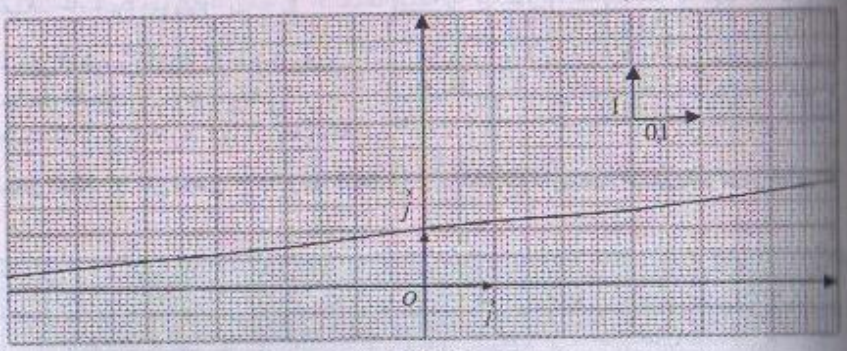
2) أ ـ $f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k)$
و بما أن $f'(x_k) = f(x_k)$ فإن $f(x_k + h) \approx (1+h) \times f(x_k) \approx (1+h) y_k$
إذن $y_{k+1} = (1+h) y_k$ (*)
من المساواة (*) نستنتج أن (y_k) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$
و عليه نكتب $y_k = y_0 (1+h)^k$ أي $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

ب ـ بما أن $n = 10$
فإن $y_k = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^k = (1,1)^k$

جـ ـ المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من القطع $[M_k\ M_{k+1}]$ حيث :
$M_k(x_k, y_k)$ و $n - 1 \geq k \geq 0$

نلاحظ انه كلما صغرت الخطوة h كلما كانت القيم y_1 ، y_n قريبة من ، $f(x_1)$ $f(x_k)$ على التوالي.
الدالة التي تحقق $y' = y$ و $y(0) = 1$ تسمى الدالة ـ الأسية و التي نرمز بـ exp .

k	y_k	k	y_k
0	1	6	1,77
1	1,10	7	1,94
2	1,21	8	2,14
3	1,33	9	2,35
4	1,46	10	2,59
5	1,61		



8 ـ البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = \frac{1}{x}$

مثال ـ ◆

نعتبر المعادلة $y' = \frac{1}{x}$ و نضيف الشرط الابتدائي $y(1) = 0$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث $f(1) = 0$
و من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[1,2]$ بخطوة $h = 0,1$
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p = x_{p-1} + 0,1$ مع $x_0 = 1$ و $10 \geq p \geq 1$
و لتكن y_0 ، y_1 ، ... ، y_{10} القيم المقربة للأعداد $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ، $f(x_{10})$ على التوالي مع $y_0 = 0$

1) احسب y_1

2) بين أن $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$ ثم اعط جدولا تبين فيه قيم y_p ، x_p ثم ارسم المنحنى التقريبي لـ f

✓ الحل

1) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ لكن $f'(x_0) = f(x_0)$ و منه ينتج :

$f(x_0+h) \approx f(x_0) + \frac{h}{x_0}$ إذن $y_1 = y_0 + \frac{h}{x_0} = \frac{h}{x_0} = 0{,}1$

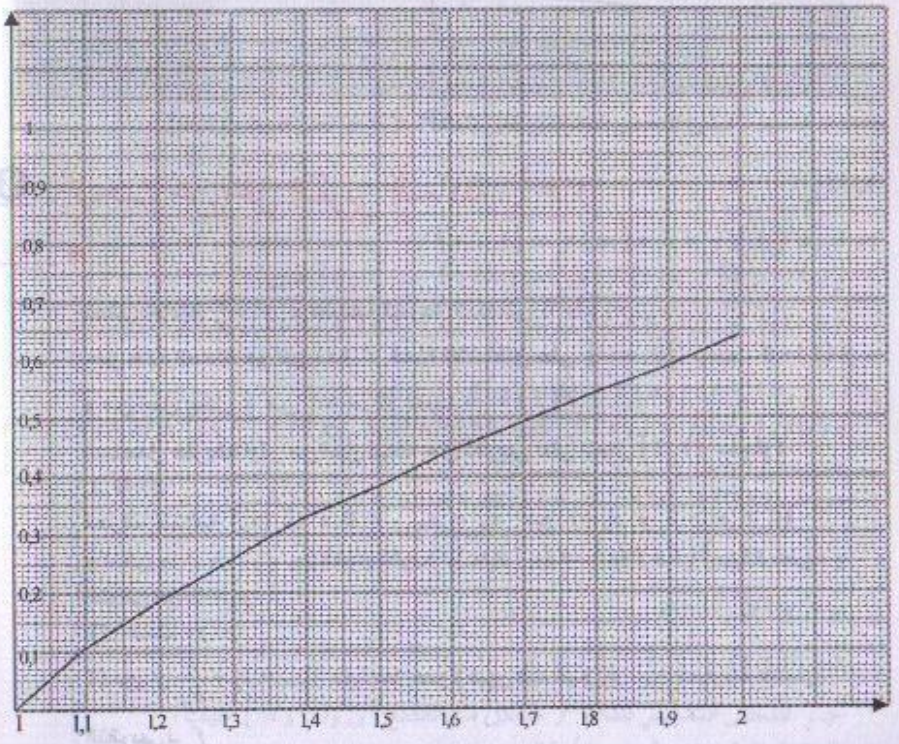
p	x_p	y_p	p	x_p	y_p
0	1	0	6	1,6	0,44
1	1,1	0,10	7	1,7	0,49
2	1,2	0,18	8	1,8	0,54
3	1,3	0,25	9	1,9	0,59
4	1,4	0,32	10	2	0,64
5	1,5	0,38			

2) $f(x_p+h) \approx f(x_p) + \frac{h}{x_p} \approx y_p + \frac{h}{x_p}$.

ومنه $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$

النحني التقريبي للدالة f مشكل من تسلسل القطع $[M_k , M_{K+1}]$ حيث $0 \le k \le 9$ و $M_k(x_k , y_k)$.

تسمى الدالة f التي تحقق $y' = \frac{1}{x}$ و $f(1) = 0$ بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرمز لها بـ "Ln".





تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 دراسة قابلية الاشتقاق

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ عند $a=0$ ، ب) $f(x) = x\,|x|$ عند $a=0$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ عند $a=0$ ، د) $f(x) = \frac{x^2-|x|}{x^2+2}$ عند $a=0$

هـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ عند $a=0$

✓ الحل

f تقبل الاشتقاق عند عدد a يعني أن النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية حقيقية عند a

أ) من أجل كل x من D_f و $x \neq 0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$.

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

ب) بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس الاشتقاق من اليمين و من اليسار عند الصفر

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to} -x = 0 = \ell_1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-0}{x} = \lim\limits_{x \to} x = 0 = \ell_2$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

بما أن $\ell_1 = \ell_2$ فإن f قابلة للاشتقاق عند $a=0$.

ج) من أجل كل x من $D_f = [0,1[$ يمكن كتابة $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

د) مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من اليمين و من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{(x^2+2)x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{(x^2+2)x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+2} = \frac{-1}{2} = \ell_2$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

هـ) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\sin X}{X} = 0$$

مع $X = \frac{1}{x}$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

تطبيق ❷ تعيين الدالة المشتقة

عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x) = x^3+3x^2-6x+4$ ، $I = \mathbb{R}$

ب) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x^2+1}$ ، $I = \mathbb{R}$

جـ) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$ على $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

د) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ، $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = 3x^2+6x-6$.

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا،

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+1)(x^2+1) - 2x(x^3-3x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4-12x^3+2x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$$

جـ) الدالتان $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto\sin x-1$ قابلتان للاشتقاق على I و لدينا :

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x-1)-(\cos x)\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

$$= \frac{-1+\sin x}{(\sin x-1)^2} = \frac{1}{\sin x-1}$$

هـ) الدالة $x\mapsto\cos x$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}$

تطبيق ❸ تعيين معادلة المماس

اكتب معادلة المماس لـ (C_f) منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة المعطاة في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x) = x^3+x^2-2x$ ، $a=0$ ب) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ، $a=1$

جـ) $f(x) = x\cos x$ ، $a=\dfrac{\pi}{4}$ د) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ ، $a=2$

✓ الحل

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن منحناها (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a معادلته $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = 3x^2+2x-2$ و منه $f'(0) = -2$

إذن (C_f) يقبل مماس (d) عند $A(0,0)$ معادلته $y = -2x$.

ب) الدالتان $x \xrightarrow{u} \sqrt{x}$ و $x \xrightarrow{v} x^2$ قابلتان للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $f = u\times v$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x) = 2x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$

إذن $f'(1) = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(C_f) يقبل مماس (d) عند النقطة $A(1,1)$ معادلته $y = \frac{5}{2}(x-1)+1$

جـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto\cos x$ ، $x\mapsto x$ و حسب قاعدة مشتق الجداء نجد $f'(x) = \cos x - x\sin x$

و منه $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

منه (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ معادلته

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\frac{\sqrt{2}}{8}$$

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما: $x \mapsto x$ و $x \mapsto x^2+2$ ومنه $f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ و بالتالي $f'(2) = \frac{-1}{18}$

ومنه معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند $A\left(2, \frac{1}{3}\right)$ هي $y = \frac{-1}{18}(x-2) + \frac{1}{3}$

تطبيق 4 المماس المشترك لمنحنيين

1) f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = \frac{8}{x} + 1$ بين أن التحنيين المثلين لـ f و g يقبلان مماسين متوازين عند النقطة ذات الفاصلة -1.

2) h و K دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = x^3 + 2$ و $K(x) = \cos x + 1$ بين أن التحنيين المثلين لـ h و K يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

✓ الحل

1) الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$

و من أجل كل x من $]-\infty, 0[$ لدينا $f'(x) = 6x - 2$ و $g'(x) = \frac{-8}{x^2}$

المنحنيان (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان عند النقطة ذات الفاصلة -1 يعني أن: $g'(-1) = f'(-1)$.

بما أن $f'(-1) = -8$ و $g'(-1) = -8$ فإن (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان ميلهما -8 عند النقطة ذات الفاصلة -1

2) الدالتان h و K قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $h'(x) = 3x^2$ و $K'(x) = -\sin x$

و منه ينتج $h'(0) = 0$ و $K'(0) = 0$ و $h(0) = 2$ و $K(0) = 2$

إذن (C_h) و (C_K) لهما نفس المماس (d) معادلته $(d): y = 2$

تطبيق 5 تعيين مماس موازي لمستقيم معلوم

(C_f) المنحنى البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x}{x^2+2} - 1$

1) اعط معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

2) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

3) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -2x$.

✓ الحل

1) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$

$f'(1) = \frac{1}{9}$ و $f(1) = -\frac{2}{3}$ ومنه معادلة المماس هي $y = \frac{1}{9}x - \frac{7}{9}$.

2) ميل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$.

المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

يعني $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$.

$f'(x_0) = -\frac{1}{4}$ يكافئ $\frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = \frac{-1}{4}$ يكافئ $x_0^4 + 12 = 0$

بما أن $x_0^4 + 12 > 0$ فإن المعادلة $x_0^4 + 12 = 0$ ذات المجهول x_0 ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ و بالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

3) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -2x$

هذا معناه أن $f'(x_0) = -2$

$f'(x_0) = -2$ يكافئ $\frac{2-x_0^4}{(2+x_0^2)^2} = -2$ يكافئ $-2x_0^4 - 7x_0^2 - 10 = 0$ (1)

بوضع $x_0^2 = X_0$ المعادلة (1) تصبح $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$

$\Delta = 49 - 4(-2)(-10) < 0$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.

و بالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) توازي المستقيم $y = -2x$.

تطبيق 6 دراسة قابلية الاشتقاق و حساب العدد المشتق

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2+2}$

1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0؟ فسر هندسيا هذه النتيجة.

2) احسب $f'(x)$ من أجل كل $x \neq 0$.

✓ الحل

1) بما أن الدالة f تغير عبارتها في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من يمين و من يسار الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-x}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+2}=-\frac{1}{2}=\ell_1$$

منه f قابلة للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+x}{(x^2+2)x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+2}=\frac{1}{2}=\ell_2$$

و منه f قابلة للاشتقاق من اليمين عند الصفر.

بما أن $\ell_2\neq\ell_1$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و (C_f) له نصفا مماسين ميلها ℓ_1 و ℓ_2.

2) بما أن $\begin{cases}|x|=x & x\geq 0\\ |x|=-x & x\leq 0\end{cases}$ فإن $\begin{cases}f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2} & x\geq 0\\ f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+2} & x\leq 0\end{cases}$

- الدالة $x\mapsto\frac{x^2+x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right)'=\frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}$

- الدالة $x\mapsto\frac{x^2-x}{x^2+2}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ و لدينا $\left(\frac{x^2-x}{x^2+2}\right)'=\frac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2}$

إذن $\begin{cases}f'(x)=\frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2} & x>0\\ f'(x)=\frac{x^2+4x-2}{(x^2+2)^2} & x<0\end{cases}$

تطبيق 7 المماس العمودي لمنحنى

f دالة معرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) بين أن $\frac{f(x)}{x-1}=\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$

ب) عين $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الواحد ؟

فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها سابقا

✓ الحل

1) $\frac{f(x)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}=\frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}=\frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-x}=0^+$.

نستنتج من نتيجة السؤال ب) أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين الواحد و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 يوازي محور التراتيب.

تطبيق 8 التقريب التآلفي

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $f(1)=2$ باستعمال خطوة قدرها 0,1

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$.

✓ الحل

لدينا $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ و عليه

$f(1,1)\approx f(1)+0,1\times f'(1)\approx 2+0,1\times\sqrt{2}\approx 2,141$

$f(1,2)\approx f(1,1)+0,1\times f'(1,1)\approx 2,141+0,1\times\sqrt{2,21}\approx 2,289$

تطبيق 9 إنشاء المنحنى التقريبي باستعمال طريقة أولر

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$

بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

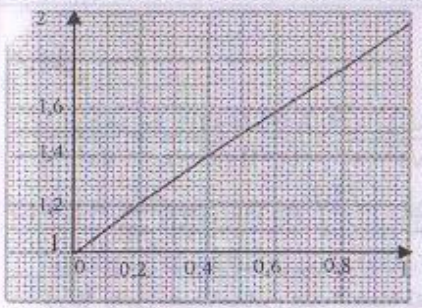
باستعمال طريقة أولر و بخطوة قدرها 0,2 عين القيمة التقريبية لـ $f(1)$.

ثم انشئ التمثيل البياني المقرب لـ (C_f) على المجال $[0,1]$.

✓ الحل

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	1	1,20	1,40	1,58	1,74	1,86

- $f(0,2) \approx f(0) + 0,2\, f'(0)$
$f(0,4) \approx f(0,2) + 0,2\, f'(0,2)$
$f(0,6) \approx f(0,4) + 0,2\, f'(0,4)$
$f(0,8) \approx f(0,6) + 0,2\, f'(0,6)$
$f(1) \approx f(0,8) + 0,2\, f'(0,8)$
منه القيمة التقريبية لـ $f(1)$ هي 1,86
التمثيل البياني المقرب لـ (C_f) مشكل من القطع $[M_K M_{K+1}]$ مع $0 \leq K \leq 5$



تطبيق 10 إيجاد عبارة دالة

f دالة معرفة من أجل كل $x \neq 1$ بـ $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان. أوجد a و b بحيث الدالة f لها قيمة حدية محلية معدومة عند -1.

✓ الحل

بما أن الدالة f لها قيمة حدية محلية عند $x=-1$ فإن $f'(-1)=0$
و بما أن القيمة الحدية المحلية عند $x=-1$ معدومة فإن $f(-1)=0$.
$f(-1)=0$ تكافئ $\frac{a-b+1}{-2}=0$ يكافئ $a-b+1=0$ (1)
الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x) = \frac{ax^2-2ax-b-1}{(x-1)^2}$
إذن $f'(-1) = \frac{3a-b-1}{4}$
$f'(-1)=0$ يكافئ $3a-b-1=0$ (2)
من (1) نجد $a=-1+b$ نعوضه في (2) نجد $b=2$
إذن $a=-1+2=1$ و بالتالي $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$

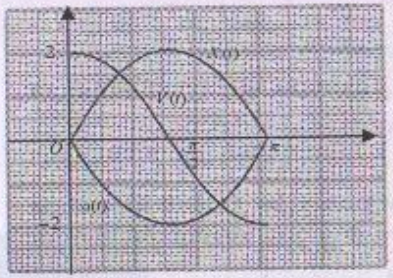
تطبيق 11 السرعة و التسارع اللحظيين

جسم معلق على حافة نابض يهتز أفقيا. معادلة حركته هي $X(t)=2\sin t$ مع X بالسنتيمتر و t بالثانية.
أ) ما هي السرعة $V(t)$ عند اللحظة t.

ب) ما هو التسارع $a(t)$ عند اللحظة t ؟
ج) ما هي العلاقة التي تربط بين $X(t)$ و $a(t)$ ؟ ثم أنشئ في نفس المعلم التمثيلات البيانية للحركة و التسارع و السرعة على المجال $[0, \pi]$.

✓ الحل

أ) $V(t) = (X(t))' = (2\sin t)' = 2\cos t$
ب) $a(t) = (V(t))'$
$a(t) = (2\cos t)' = -2\sin t$
ج) $a(t) = (-2\sin t) = -X(t)$



تطبيق 12 نظرية القيم المتوسطة و حل المعادلات

f دالة معرفة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-x^2-x+\frac{5}{6}$.
1) شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.
2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟
3) نسمي α الحل الذي ينتمي إلى $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$ أعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-2}

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2-2x-1$
$f'(x)$ تكتب على الشكل $f'(x) = (x-1)(3x+1)$
إذا كان $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على كل من $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ و $[1, +\infty[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$\frac{55}{54}$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$+\infty$

إذا كان $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ فإن $f'(x) \leq 0$ و منه f متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

2) - بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ و $0 \in \left]-\infty, \frac{55}{54}\right[$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد في المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{3}\right[$

- بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$ و $0 \in \left]-\frac{1}{6}, \frac{55}{54}\right[$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد في المجال $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$

- بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $]1, +\infty[$ و $0 \in \left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, +\infty[$

إذن $f(x) = 0$ لها ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.

3) تعيين حصر لـ α باستعمال طريقة الديكتومي

نضع : $a = -\frac{1}{3}$ ، $b = 1$

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ ، $f(x_0) = \frac{23}{54} > 0$

$x_1 = \frac{x_0 + b}{2} = \frac{2}{3}$ ، $f(x_1) = \frac{1}{54} > 0$

$x_2 = \frac{x_1 + b}{2} = \frac{5}{6}$ ، $f(x_2) = \frac{-25}{216} < 0$

إذن الحل α ينتمي إلى $\left]\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right[$ و منه الحصر $0,66 < \alpha < 0,83$.

تطبيق 13 تعيين عدد حلول معادلة باستعمال دراسة دالة

حدد عدد الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلتين في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) $\sin x - x = 2$ ب) $x(2x+1)^2 = 5$.

✓ الحل

1) نضع $f(x) = \sin x - x$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \cos x - 1$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) \leq 0$

ومنه $f'(x)$ سالب و ينعدم عند القيم من الشكل $x = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $-1 \leq \sin x \geq 1$

وبإضافة $-x$ إلى حدود هذه الأخيرة نجد $-1-x \geq \sin x - x \geq 1-x$

إذن حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ومنه $f(x)$ تنتمي إلى $]-\infty, +\infty[$.

- بما أن $f'(x) \leq 0$ على $\mathbb{R}$ و 2 ينتمي إلى $\mathbb{R}$

فإن المعادلة $f(x) = 2$ أي $\sin x - x = 2$ لها حل وحيد α ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) نضع $f(x) = x(2x+1)^2$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = (2x+1)(6x+1)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ، $f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{-2}{27}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{6}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-2}{27}$	↗	$+\infty$

. الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$ و $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

و متناقصة تماما على $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right[$

. بما أن $f'(x) > 0$ على $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ و $0 \notin]-\infty, 0[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

. بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}\right[$ و $5 \notin \left]-\frac{2}{27}, 0\right[$

فإن المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $\left]-\frac{1}{2}, \frac{-1}{6}\right[$.

. بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$ و $5 \in \left]\frac{-2}{27}, +\infty\right[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ لها حل وحيد α ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$

إذن للمعادلة $f(x) = 5$ حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

تطبيق 14 تعيين القيمة المقربة و القيمة المضبوطة لحل معادلة

f دالة معرفة على المجال $[1, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f
2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ثم اعط حصرا له بتقريب 10^{-2} و أوجد بطريقة جربة القيمة المضبوطة لـ α.

✓ الحل

1) الدالة f معرفة على $]1,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$
من اجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.
$f(1)=-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) - بما أن $f'>0$ و $0\in]-3,+\infty[$
فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي الى $]-3,+\infty[$
- نلاحظ أن $f(2)=-1$ و $f(3)=\sqrt{2}-1$ ومنه α ينتمي إلى $]2,3[$.
نستعمل طريقة المسح لتعيين قيمة تقريبية لـ α

x	$f(x)$
2,0	-1
2,1	-0,8511
2,2	-0,7045
2,3	-0,5598
2,4	-0,4167
2,5	-0,27
2,6	-0,1350
2,7	+0,0038

$p=0,1$

x	$f(x)$
2,60	-0,1350
2,61	-0,1211
2,62	-0,1072
2,63	-0,0932
2,64	-0,0793
2,65	-0,065
2,66	-0,051
2,67	-0,037
2,68	-0,0238
2,69	-0,01
2,70	+0,0038

$p=0,01$

إذن $2,68<\alpha<2,70$ و منه 2,70 هي القيمة المقربة بالزيادة لـ α إلى 10^{-2}.

- $f(x)=0$ يكافئ $x-4+\sqrt{x-1}=0$
يكافئ $(4-x)^2=x-1$ و $x\geq 4\geq 1$
يكافئ $x^2-9x+17=0$
$\Delta=81-4(17)=81-68=13$
$x_1=\frac{9+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2=\frac{9-\sqrt{13}}{2}$
x_1 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[1,4]$ إذن القيمة المضبوطة لـ α هي $\alpha=\frac{9-\sqrt{13}}{2}$.

تطبيق 15 حساب مشتق الدوال المركبة

1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$
2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية
أ) $g(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$ ، ب) $h(x)=\frac{2x^4+1}{x^2-1}$.
جـ) $K(x)=\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}$ ، د) $L(x)=\frac{2(\cos x)^4+1}{\cos x-1}$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها ناطقة و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا:
$f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$

2) أ) يمكننا وضع $g(x)$ على الشكل $g(x)=f(\sqrt{x})$.
$g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{2x-4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

ب) لدينا $h(x)=f(x^2)$ ومنه $h'(x)=(x^2)'f'(x^2)=2x\times\frac{2x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$

جـ) يمكننا وضع $K(x)$ على الشكل $K(x)=\sqrt{f(x)}$
$K'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}}=\frac{(2x^2-4x-1)(\sqrt{x-1})}{(2\sqrt{2x^2+1})(x-1)^2}$

د) لدينا $L(x)=f(\cos x)$ ومنه $L'(x)=(\cos x)'f'(\cos x)=-\sin x\times\frac{2(\cos x)^2-4\cos x-1}{(\cos x-1)^2}$

تطبيق 16 حساب مشتق دالة باستعمال مشتق دالة مركبة

f دالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{2x+2}{x-2}$
1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f.
2) لتكن g دالة معرفة على المجال $I=]4,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(\sqrt{x})$.
بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة و لدينا $f'(x)=\frac{-6}{(x-2)^2}$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $J=]2,+\infty[$

و الدالة $u:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $I=]4,+\infty[$

و من اجل كل x من I لدينا $u(x)\in J$

إذن الدالة $g=f\circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و من اجل كل x من I لدينا

$$g'(x)=u'(x)\times f'(u(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{-6}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{-3}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)^2}$$

تطبيق 17 حساب العدد المشتق بيانيا

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

تمثيلها البياني و المماسان عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 1 و 0 كما هو مبين في الشكل المجاور.

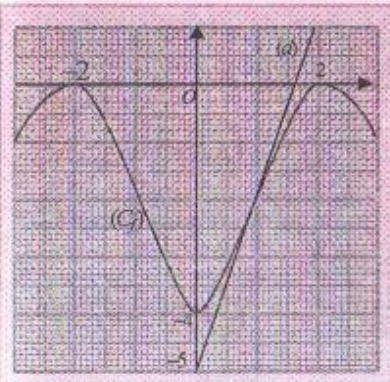
لتكن g و h دالتين معرفتين من أجل كل x من $\mathbb{R}$

بـ $g(x)=(fof)(x)$ و $h(x)=f(x^2)$

1) باستعمال هذا البيان عين

$f(1)$ ، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(1)$.

2) استنتج $g'(1)$ و $h'(1)$.



✓ الحل

1) من البيان نجد $f(1)=-2$ ، $f(-2)=0$

- لدينا $f'(-2)=0$ لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة -2 موازي لـ $(x'x)$.

- ميل المستقيم (d) هو $f'(1)$ حيث $f'(1)=\frac{-2+5}{1-0}=\frac{3}{1}=3$.

2) - بما ان $g(x)=f(f(x))$ فان $g'(x)=f'(x)\times f'(f(x))$

إذن $g'(1)=f'(1)f'(f(1))$ اي $g'(1)=3\times f'(-2)=0$

- بما أن $h(x)=f(x^2)$ فإن $h'(x)=2xf'(x^2)$

إذن $h'(1)=2f'(1)=2\times3=6$.

تطبيق 18 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

أوجد نهاية الدالة f عند العدد a المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $a=0$ ، $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ب) $a=0$ ، $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

جـ) $a=2$ ، $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ د) $f(x)=\frac{(x+2)^3-1}{x^2-1}$ ،

✓ الحل

إذا كانت نهاية دالة f عند a من الشكل $\frac{0}{0}$ و كانت $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق عند a فإن $\lim_{x\to a}f(x)=g'(a)$.

أ) بوضع $g(x)=\cos x$ نجد $g(0)=1$

و منه نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=0$ و منه

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=-\sin x$ ومنه نجد $g'(0)=0$

إذن $\lim_{x\to0}f(x)=g'(0)=0$.

ب) بوضع $g(x)=\tan x$ نجد $g(0)=0$ و منه $f(x)$ تكتب بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و لدينا $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

من أجل كل $x\in D_g$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$ ومنه نجد $g'(0)=1$.

إذن $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=g'(0)=1$

جـ) بوضع $g(x)=\sqrt{x+7}$. نجد $g(2)=3$

و منه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-7,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=2$

و بالتالي $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+7}}=\frac{1}{6}$

إذن $\lim_{x\to2}f(x)=g'(2)=\frac{1}{6}$

د) بوضع $g(x)=(x+2)^3$ نجد $g(-1)=1$

ومنه $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند $a=-1$ و لدينا $\lim\limits_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)=3$

و $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$ و حسب قاعدة جداء النهايات نجد $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}$

تطبيق 19 قاعدة لوبيتال

1) بين انه إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند العدد x_0

و بحيث $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

2) استعمل هذه القاعدة لحساب :

أ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}$

جـ) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، د) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}$

✓ الحل

1) f و g قابلتان للاشتقاق عند x_0 هذا معناه أن :

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و $g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

بما ان $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإنه يمكن كتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الشكل :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \quad \text{مع } x\neq x_0.$$

إذن $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

2) أ) نضع $f(x)=\sqrt{x+7}-3$ و $g(x)=x-2$

ومنه نجد $f(2)=g(2)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=2$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{1}{6}$.

ب) نضع $f(x)=x^4-1$ و $g(x)=x^3+3x^2-4$ عندئذ $f(1)=g(1)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=1$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{9}$.

جـ) نضع $f(x)=\sin(2x)$ و $g(x)=x-\pi$ منه $f(\pi)=g(\pi)=0$.

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=\pi$.

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi}=\frac{f'(\pi)}{g'(\pi)}=2$

د) نضع $f(x)=\cos x+\sin x-1$ و $g(x)=\sin x-\cos x+1$ عندئذ $f(0)=g(0)=0$

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0=0$

ومنه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=1$.

تطبيق 20 المشتقات المتتابعة

f دالة معرفة من أجل كل $x\neq-1$ ب $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$.

2) خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من اجل كل $n\geq1$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ ، $f^{(2)}(x)=f'\left(f^{(1)}(x)\right)=\frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x)=f'\left(f^{(2)}(x)\right)=\frac{-6}{(x+1)^4}$ ، $f^{(4)}(x)=f'\left(f^{(3)}(x)\right)=\frac{24}{(x+1)^5}$

2) نلاحظ ان $-1=(-1)^1\times1!$ ، $2=(-1)^2\times2!$ ، $-6=(-1)^3\times3!$ ، $24=(-1)^4\times4!$

اذن عبارة $f^{(n)}(x)$ تكون من الشكل $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{(x+1)^{n+1}}$.

نسمي p_n الخاصية المراد إثباتها.

من اجل $n=1$ لدينا $f^{(1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^1\times1!}{(x+1)^2}$

و منه p_1 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة أي $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\times n!}{(x+1)^{n+1}}$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

$$f^{(n+1)}(x)=f'\left(f^{(n)}(x)\right)=\frac{-(n+1)(-1)^n\times n!(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}$$

$$=\frac{[(n+1)\times n!]\times(-1)^{n+1}\times(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}=\frac{(n+1)!\times(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

ومنه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.

تطبيق 21 نقطة الإنعطاف

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$.

1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$ مع $n\geq 1$.

2) عين إشارة $f^{(3)}(x)$ ماذا تستنتج ؟

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x)=f'(x)=x^2-4x+3$

$f^{(2)}(x)=f'\left(f^{(1)}(x)\right)=2x-4$.

$f^{(3)}(x)=f'\left(f^{(2)}(x)\right)=2$

$f^{(4)}(x)=f'\left(f^{(3)}(x)\right)=0$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f^{(n)}(x)=0$

2) $f^{(2)}(x)$ ينعدم عند $x=2$ مغيرا إشارته في جوار 2

إذن $M_0(2,f(2))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

- إذا انعدم $f^{(1)}(x)$ عند x_0 و لا يغير إشارته فإن $M_0(x_0,f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

تطبيق 22 دراسة اتجاه تغير دالة

ادرس اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية :

1) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$ ب) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$

جـ) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{1-x}$ د) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$

هـ) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$ و) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

ن) $f(x)=\cos^2 x-2$ على المجال $[0,\pi]$

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2+2x+5$.

$f'(x)=0$ يكافئ $3x^2+2x+5=0$

$\Delta=2^2-4(3)(5)=-56$

$\Delta<0$ منه المعادلة $3x^2+2x+5=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $f'(x)$ من إشارة معامل (x^2)

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x)>0$. و عليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}-\{5\}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{-11}{(x+5)^2}$

من أجل كل x من D_f لدينا $f'(x)<0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,5[$ و $]5,+\infty[$.

جـ) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$.

$f'(x)=0$ يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=3)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+2x+3)$.

- إذا كان x ينتمي إلى $[-1,3]$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تما على $[-1,3]$.

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ فإن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ ، $[3,+\infty[$.

د) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{-12x}{(3+x^2)^2}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

- إذا كان $x\leq 0$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $]-\infty,0[$

- إذا كان $x\geq 0$ فإن $f'(x)\leq 0$ و منه f متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.

هـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x+1)^4}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)(1+x)$.

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $]-1,1[$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f'(x)\leq 0$

و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$.

و) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[\cup]-\infty,-2[=D$ ولدينا $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$ و $x\in D$.

بما أن $0\notin D$ فإن المعادلة $f'(x)=0$ ليس لها حلولا في D.

- إذا كان $x<2$ فإن $f'(x)<0$ ومنه f متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.

- إذا كان $x<-2$ فإن $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty,-2[$.

ن) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$ ولدينا $f'(x)=-2\sin x\cos x$.

$f'(x)=0$ يكافئ ($x=\pi$ أو $x=0$) أو $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$.

- إذا كان $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $f'(x)\le 0$ منه f متناقصة تماما على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- إذا كان $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فإن $f'(x)\ge 0$ منه f متزايدة تماما على $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

تطبيق 23 استعمال إشارة دالة لتعيين اتجاه دالة أخرى

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-4x^3+6x^2-6x+2$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

2) عين عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$ ثم اعط حصرا لها.

3) استنتج من الأسئلة السابقة إشارة f.

4) g دالة معرفة بـ $g(x)=-x^4+2x^3-3x^2+2x$.

أ) باستعمال الأسئلة السابقة عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج ان من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $g(x)\le\frac{7}{16}$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^3=-\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=-12x^2+12x-6$

$f'(x)=0$ يكافئ $2x^2-2x+1=0$

المعادلة $2x^2-2x+1=0$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ لأن مميزها سالب

إذن المشتق لا ينعدم و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة معامل (x^2)

و عليه $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		−	
تغيرات f	$+\infty$	↘	$-\infty$

2) بما أن $f'<0$ على $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$

حيث $0<\alpha<1$ لأن $f(0)>0$ و $f(1)<0$ و باستعمال طريقة ديكتومي نجد $\alpha=\frac{1}{2}$.

3) إذا كان $x<\alpha$ فإن $f(x)>0$ و إذا كان $x>\alpha$ فإن $f(x)<0$

4) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=f(x)$

- $g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=\alpha$.

- إذا كان $x<\alpha$ فإن $g'(x)>0$ و عليه الدالة g متناقصة تماما على $]\alpha,+\infty[$.

- إذا كان $x<\alpha$ فإن $g'(x)>0$ و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty,\alpha[$.

من جدول تغيرات g نستنتج انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)\le g(\alpha)$ و بما أن $g(\alpha)=\frac{7}{16}$ فإن $g(x)\le\frac{7}{16}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	0	−	
تغيرات g	$-\infty$	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$

تطبيق 24 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$

و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $(+\infty)$.

ب) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f).

2) ادرس نهاية f عند -2 ماذا تستنتج ؟

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن $H\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

✓ الحل

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

ب) $y=x+\frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{8}{2x+4}=0$$

إذن $y=x+\frac{1}{2}$ معادلة المستقيم المقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

2) بما ان $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+5x+10)=8$ و $\lim\limits_{x\to -2}(2x+4)=\overset{+}{0}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}(2x+4)=0$

فإن $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}f(x)=-\infty$

ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-2$ مقارب عمودي لـ (C_f).

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و لدينا $f'(x)=\frac{2x(x+4)}{2(x+2)^2}$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=0)$ او $(x=-4)$.

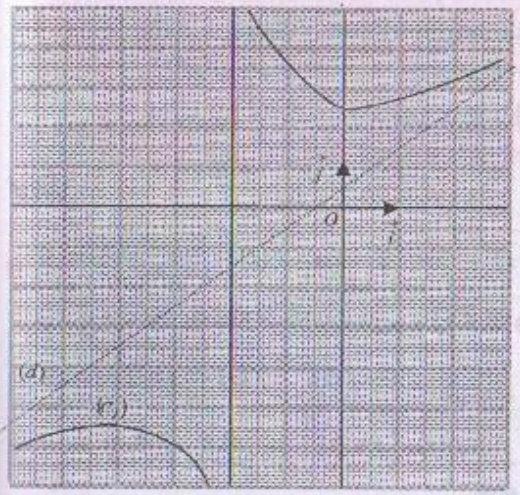
- إذا كان $x\in[-4,-2[\cup]-2,0]$ فإن $f'(x)\le 0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-4,-2]$ و $]-2,0]$.

- إذا كان $x\in]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$ و منه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-4]$ و $[0,+\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘	$+\infty$ \| $-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$+\infty$

$f(0)=2,5$ و $f(-4)=-5,5$



4) $H(-2,-1,5)$ مركز تناظر لـ (C_f)

إذا و فقط إذا كان

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

$f(2(-2)-x)=\frac{2x^2+11x+22}{-2x-4}$

$-3-f(x)=\frac{-2x^2-11x-22}{2x+4}$

ومنه نستنتج أن :

$f(2(-2)-x)=-f(x)+2(-1,5)$

إذن H هي مركز تناظر لـ (C_f)

تطبيق 25 دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=x^3-3x-3$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) بين ان المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$ نرمز له بـ α ثم

- اعط حصرا له بتقريب 10^{-2}

جـ) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

أ) بين ان إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير f على $]1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات f على D_f.

جـ) بين أن $f(\alpha)=3\alpha+1$

د) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس الوضع النسبي لهذا المستقيم بالنسبة إلى (C_f).

هـ) أوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم المقارب المائل. ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

✓ الحل

1) أ) دراسة تغيرات g

• $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-1)$.

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $g'(x)<0$

و منه g متناقصة تماما على $[-1,1]$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $g'(x)>0$

و منه g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$.

و اليك جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات g	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

ب) بما أن $g'(x)\ge 0$ على المجال $[1,+\infty[$ و $0\in[g(1),+\infty[$ فإن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α ينتمي إلى المجال

$]1,+\infty[$

- بما أن $g'(x)<0$ على $]-\infty,-1]$ و $[g(-1),-\infty[$ $0\notin$
فإن المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في المجال $]-\infty,-1[$.
- بنفس الطريقة نبين أن المعادلة $g(x)=0$ ليس لها حلولا في $[-1,1]$.
إذن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α في $\mathbb{R}$
نلاحظ أن $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ ومنه $\alpha\in]2,3[$
باستعمال طريقة البيكتومي نجد $2,06<\alpha<2,12$
جـ) إذا كان $x\in]-\infty,\alpha[$ فإن $g(x)<0$
و إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ فإن $g(x)>0$.

2) 1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}\times g(x)$

إذا كان $x<1$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2}<0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]1,+\infty[$

ب) - إذا كان $x\in]1,\alpha[$ فإن $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1,\alpha[$.
- إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $]\alpha,+\infty[$.
• اتجاه تغير f على $]-\infty,-1[\cup]-1,1[$:
- إذا كان $x\in]-\infty,-1[$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2}<0$ و $g(x)<0$ وبالتالي $f'(x)>0$
إذن f متزايدة تماما على $]-\infty,-1[$.
- إذا كان $x\in]0,1[$ فإن $f'(x)<0$ منه f متناقصة تماما على $]0,1[$.
- إذا كان $x\in]-1,0[$ فإن $f'(x)>0$ منه f متزايدة تماما على $]-1,0[$.
• جدول تغيرات f على D_f :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$

جـ) $f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1$ و لدينا $g(\alpha)=0$
$g(\alpha)=0$ يكافئ $3=\alpha^3-3\alpha$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}+1=\frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}+1=3\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}\right)+1=3\alpha+1$$

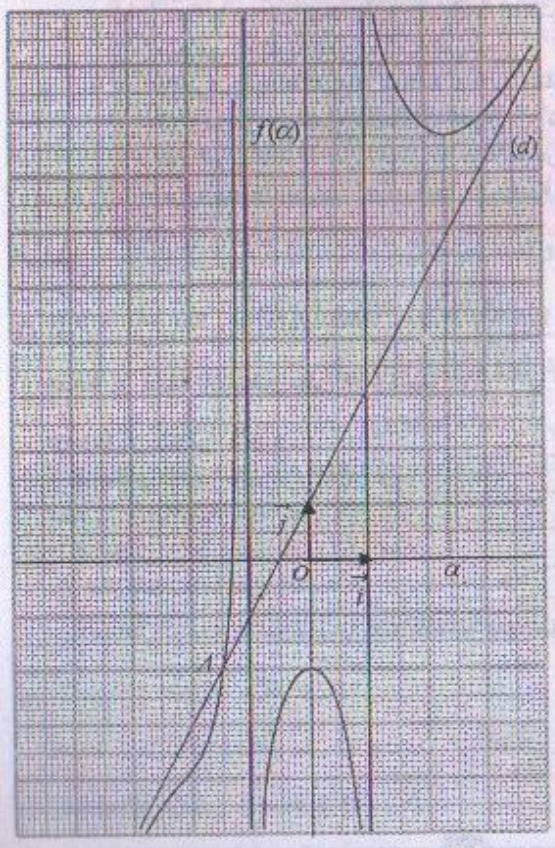
د) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{2}{x}=0$
إذن $y=2x+1$: (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
- الوضع النسبي لـ (d) بالنسبة إلى (C_f).

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x+3}{x^2-1}$$

إذا كان x ينتمي إلى أحد المجالين $]-\infty,-\frac{3}{2}[$ و $]-1,1[$ فإن (C_f) يقع تحت (d)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+1$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-(2x+1)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

- إذا كان $x\in]-\frac{3}{2},-1[\cup]1,+\infty[$
فإن (C_f) يقع فوق (d)
- (d) يقطع (C_f) في النقطة $A\left(-\frac{3}{2},-2\right)$.



هـ) ميل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$.
المماس يوازي (d) هذا معناه أن $f'(x_0)=2$
$f'(x_0)=2$ يكافئ $x_0^2+3x_0+1=0$ (1)
$\Delta=3^2-4(1)(1)=5$ منه المعادلة (1) ذات المجهول x_0 لها حلان هما :

$x_0'=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ و $x_0''=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

إذن المنحنى (C_f) له مماسان عند النقطتين ذات الفاصلتين : x_0'' و x_0' يوازيان (d).

تطبيق 26 عائلة المنحنيات

1) لتكن f_0 دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_0(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و (γ_0) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
أ) ادرس تغيرات f_0 على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
ب) عين معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1

2) من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة f_n بـ $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^2}$.
أ) ادرس تغيرات f_1 ثم شكل جدول تغيراتها.
ب) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، $f_n'(x)$ له نفس إشارة x ثم استنتج اتجاه تغير f_n.
جـ) برهن ان المنحنيين (γ_1) ، (γ_2) للدالتين f_1 و f_2 على الترتيب يقبلان مستقيما مقاربا افقيا يطلب تعيينه.
د) برهن أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لبيان الدالة f_3.
3) أ) برهن ان جميع منحنيات الدوال f_n تمر من نقطة ثابتة A.
ب) عبر بدلالة n عن معامل توجيه المماس للمنحنيات (γ_n) عند النقطة A
جـ) ارسم المنحنيات (γ_0) ، (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3).

✓ الحل

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_0'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f_0'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

- إذا كان $x<0$ فإن $f_0'(x)>0$ و منه f_0 متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x>0$ فإن $f_0'(x)<0$ منه f_0 متزايدة تماما على $]-\infty,0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f_0		↗	1	↘	
			0		0

ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو $f_0'(1)=-\frac{1}{2}$.

2) أ) $f_1(x)=\frac{x}{1+x^2}$ ، $D_{f_1}=\mathbb{R}$.

الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_1'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f_1'(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=-1)$.

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f_1'(x)>0$ منه f_1 متزايدة تماما على $[-1,1]$.
- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

فإن $f_1'(x)<0$ ومنه f_1 متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ ، $]+1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
تغيرات f_1		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	
			0				0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

ب) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f_n'(x)=\frac{x^{n-1}\left[(n-2)x^2+n\right]}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $n\geq 2$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $(n-2)x^2+n\geq 0$

و منه إشارة $f_n'(x)$ هي نفس إشارة x^{n-1} اي نفس إشارة x.

- إذا كان $x>0$ فإن $f_n'(x)>0$ و منه f_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.
- إذا كان $x<0$ فإن $f_n'(x)<0$ منه f_n متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$.

جـ) بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_1(x)=0$ فإن (γ_1) له مستقيم مقارب افقي معادلته $y=0$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_2(x)=1$ فإن (γ_2) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

د) $y=x$ مقارب مائل لـ (γ_3) إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f_3(x)-x)=0$.

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f_3(x)-x\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

إذن $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (γ_3) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) أ) نفرض أن (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) يمران من نقطة ثابتة $A(x_0,y_0)$ حيث $n_1\neq n_2$.

$A\in(\gamma_{n_1})$ هذا معناه ان:

$$y_0=\frac{{x_0}^{n_1}}{1+{x_0}^2}\quad\ldots\quad(1)$$

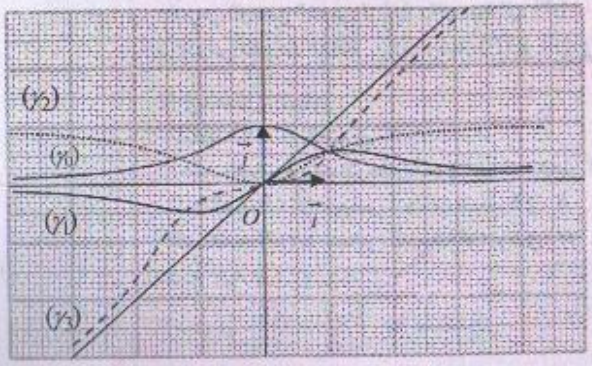
$A\in(\gamma_{n_2})$ هذا معناه ان

$$y_0=\frac{{x_0}^{n_2}}{1+{x_0}^2}\quad\ldots\quad(2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$\frac{{x_0}^{n_1}}{1+{x_0}^2}=\frac{{x_0}^{n_2}}{1+{x_0}^2}$$

منه نستنتج ${x_0}^{n_1}={x_0}^{n_2}$



و بما أن $n_1 \neq n_2$ فإن $x_0 = 1$ و عليه $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_n) عند A هو $f_n'(1)$.

$$f_n'(1) = \frac{1[(n-2)+n]}{(1+1)^2} = \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات f_2		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f_3'(x)$		$+$	0	$+$	
تغيرات f_3	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

تطبيق 27 المنحنى المقارب - حجم مخروط دوراني

1) f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$. نسمي (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (طول الوحدة 4cm).

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]1,+\infty[$ يكون $f(x) = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$.

ب) ادرس نهاية f عند 1 و عند $(+\infty)$.

جـ) (P) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $]1,+\infty[$ بـ $g(x) = x^2+1$.

- ما هي نهاية $[f(x)-g(x)]$ لما x يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

- ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (P)

د) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (P) و (γ) في نفس المعلم السابق.

2) في الشكل المجاور.

- المثلث ABC قائم في B.

- نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $OB = 1$.

- المستقيم (BC) مماس لنصف الدائرة في B.

- المستقيم (AC) مماس لنصف الدائرة في H.

نضع $AB = h$ و $BC = x$

أ) بين أن $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ ثم استنتج

المساويات التالية $h = x\sqrt{(h-1)^2-1}$ و $x^2 = \frac{h}{h-2}$ و $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

ب) بتدوير المثلث ABC حول المستقيم (AB) نحصل على مخروط دوراني رأسه A و إذا علمت أن حجم المخروط الذي ارتفاعه h و مساحة قاعدته S هو $V = \frac{h \times S}{3}$. عبر عن $V(x)$ حجمه بدلالة x.

جـ) باستعمال النتائج المحصل عليها في السؤال (1) عين القيمة x التي من اجلها يكون حجم المخروط اصغريا ثم عين من اجل القيمة المحصل عليها الزاوية $B\hat{A}C$ بتقريب 0,1 درجة.

✓ الحل

1) أ) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) = \frac{x^4-1+1}{x^2-1} = \frac{x^4-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$

$$= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1) = \overset{+}{0}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

جـ) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

منه نستنتج أن (P) منحنى مقارب لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x^2-1} > 0$

و منه المنحنى (γ) يقع فوق (P).

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا $f'(x) = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \sqrt{2}$.

- إذا كان $x > \sqrt{2}$ فإن $f'(x) > 0$

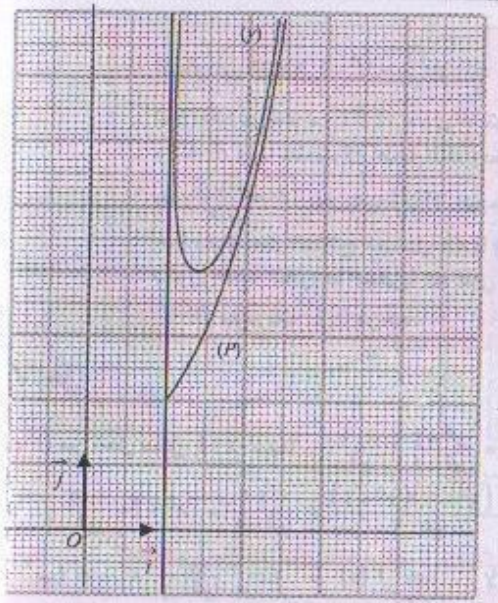
ومنه f متزايدة تماما على $]\sqrt{2},+\infty[$

- إذا كان $1 < x < \sqrt{2}$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على $]1,\sqrt{2}[$

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\!\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) \approx 5,33$ ، $g(2) = 5$



2) 1) في المثلث القائم ABC لدينا

$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$ (1)

و في المثلث القائم AOH لدينا

$\tan \hat{A} = \frac{OH}{AH}$ (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ (I)

• استنتاج المساوات

بما أن H نقطة من نصف الدائرة

فإن $OH = 1$

ومنه المساواة (I) تصبح $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$

إذن $h = AH \times x$.

في المثلث OAH لدينا :

$OA^2 = OH^2 + AH^2$

ومنه $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$

لكن $OA = AB - OB = h - 1$

إذن $AH = \sqrt{(h-1)^2 - 1}$ بالتالي $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$.

- بتربيع المساواة $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ نجد $h^2 = \left[(h-1)^2 - 1\right] \times x^2$ و منه :

$x^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2 - 1}$ اي $x^2 = \frac{h^2}{h^2 - 2h} = \frac{h}{h-2}$

- من المساواة $x^2 = \frac{h}{h-2}$ نجد $h(x^2 - 1) = 2x^2$ بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

ب) $V(x) = \frac{h \times S}{3}$ و $S = \pi \times BC^2 = \pi x^2$

إذن $V(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \times \frac{\pi x^2}{3} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{x^4}{x^2 - 1}\right)$

جـ) نلاحظ ان $V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x)$ اي $V(x) = \lambda f(x)$

بما أن $\lambda > 0$ فإن V و f لهما نفس اتجاه تغير و بما ان f لها قيمة صغرى عند $x = \sqrt{2}$

فإن V لها قيمة صغرى عند $\sqrt{2}$ و في هذه الحالة $V = \frac{2\pi}{3} f(\sqrt{2}) = \frac{8\pi}{3}$

$\tan(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

و منه $B\hat{A}C \approx 19{,}52°$

تطبيق 28 المسافة الأعظمية و دوال كثيرة الحدود

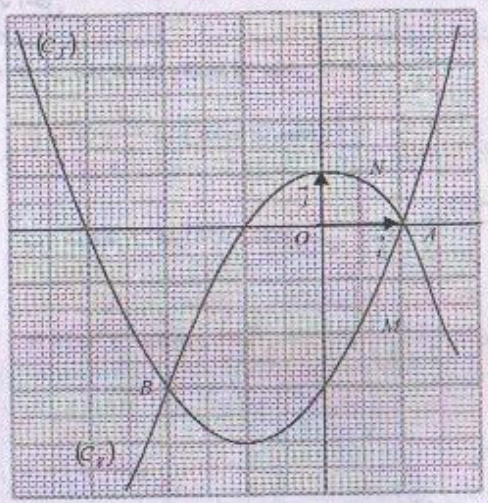
f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 1 - x^2$

(C_f) و (C_g) المنحنيان الممثلان لـ f و g في معلم متعامد و متجانس.

أ) ارسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.

ب) M و N نقطتان من (C_f) و (C_g) على الترتيب فاصلتيهما t مع $t \in [-2,1]$. من أجل اي قيمة لـ t تكون MN اعظمية ؟ ثم احسبها.

✓ الحل



أ) - المنحنيان (C_g) و (C_f) عبارة عن قطعين مكافئين

- (C_g) و (C_f) يتقاطعان في النقطتين $A(1,0)$ و $B(-2,-3)$

ب) $M(t, f(t))$ ، $N(t, g(t))$

$MN = \sqrt{(t-t)^2 + (f(t) - g(t))^2}$

$= |f(t) - g(t)| = g(t) - f(t)$

$= -3t^2 - 2t + 4$

نضع $h(t) = -3t^2 - 2t + 4$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[-2,1]$ و لدينا $h'(t) = -6t - 2$

t	-2		$-\frac{1}{3}$		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	$h\left(-\frac{1}{3}\right)$	↘	

المسافة MN تكون اعظمية لما $x = -\frac{1}{3}$ و في هذه الحالة

$MN = h\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3}$.

تطبيق 29 المسافة الأعظمية و الدوال الجذرية

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = x\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2}$ حيث ρ حقيقي موجب تماما.

1) تحقق ان f معرفة على $\left[\frac{-\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم بين ان f لها قيمة اعظمية من اجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

2) نهتم الآن بكل المعينات التي محيطها ρ و طول احد قطريها x.

ا) عبر عن مساحة هذه المعينات بدلالة x و ρ.

ب) باستعمال السؤال الأول، عين من بين المعينات تلك التي لها مساحة اعظمية و ما طبيعة هذا المعين ؟

✓ الحل

1) ا) f معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4}-x^2\geq 0$

$\frac{\rho^2}{4}-x^2\geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x\in\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ و منه $D_f=\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$.

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right[$ و لدينا $f'(x)=\frac{-2\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $\left(x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ أو $\left(x=\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\left(x^2-\frac{\rho^2}{8}\right)$.

x	$-\frac{\rho}{2}$		$\frac{-\rho}{2\sqrt{2}}$		$\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$		$\frac{\rho}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f\left(-\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{2}\right)$	↘	0

$f(-\rho)=0$

و $f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\rho^2}{8}$

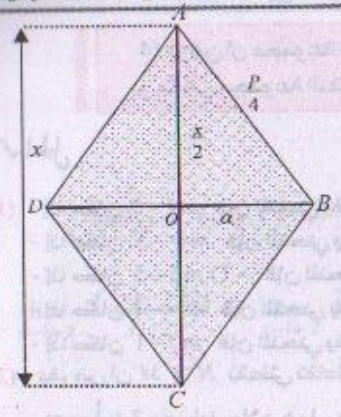
إذن من أجل كل x من $\left]-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right[$ يكون $f(x)\leq f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

ومنه f لها قيمة اعظمية من أجل $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

2) ا) نسمي A مساحة المعين المفروض $A(x)=S_T\times 4$

حيث S_T مساحة المثلث OAB.

$S_T=\frac{\alpha}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{\alpha x}{4}$ ومنه $A=\alpha x$



لدينا $\alpha^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\rho}{4}\right)^2$

ومنه $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}$ اي $\alpha=\sqrt{\frac{\rho^2}{16}-\frac{x^2}{4}}$

إذن $A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-x^2}=\frac{1}{2}f(x)$

ب) بما أن f و $\frac{1}{2}f$ لهما نفس اتجاه تغير فإن f

اي A لها قيمة أعظمية عند $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

إذن يوجد معين واحد من بين المعينات له مساحة اعظمية هي $A\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ و محيطه ρ.

في هذه الحالة (أي لما $x=\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$) قيمة α هي $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^2}{8}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho}{2\sqrt{2}}=\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$.

بما أن $OA=OB$ فإن $ABCD$ مربع.

تطبيق 30 الدوال و المحل الهندسي

المنحنى ذو المعادلة $y=x-3+\frac{1}{x}$ ممثل في الشكل المجاور.

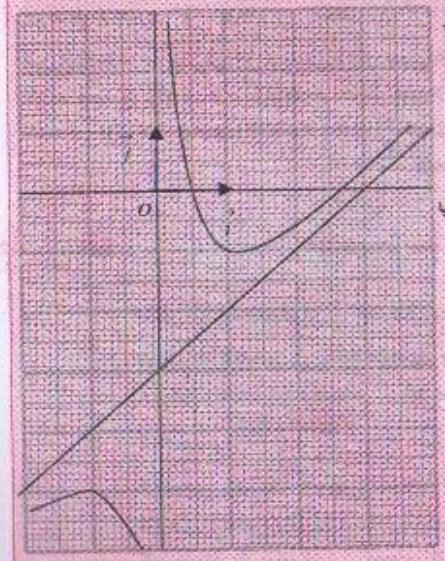
d مستقيم معادلته $y=m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

1) باستعمال المنحنى عين حسب قيم m عدد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم d.

2) لتكن M و N نقطتين تقاطع المنحنى مع المستقيم d في حالة وجودهما.

تحقق أن فاصلتهما x_M و x_N هما حلول للمعادلة $x^2-(m+3)x+1=0$

3) I منتصف $[MN]$ تحقق ان إحداثيتا I $\left(\frac{m+3}{2}, m\right)$



من $\left]2, \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$ يكون $f'(x)<0$

- إليك جدول تغيرات f

x	0		$\frac{4}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	0		$-$	$\|\|$	$+$	
تغيرات f	2	↗	$2\sqrt{5}$	↘	4	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=2\sqrt{5}\approx 4{,}47$

4) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$

فإن $y=3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

5) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$ فهي تقابل و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1} من $[4,+\infty[$ في $[2,+\infty[$

$f^{-1}: [4,+\infty[\to[2,+\infty[$

$y\mapsto x=f^{-1}(y)$

إيجاد عبارة $f^{-1}(x)$

من اجل كل $y\geq 4$ لدينا $y=2x+\sqrt{x^2-4}$ و منه $3x^2-4xy+y^2+4=0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x_1=\frac{2y+\sqrt{y^2-12}}{3}$ ، $x_2=\frac{2y-\sqrt{y^2-12}}{3}$

x_2 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[2,+\infty[$.

إذن $f^{-1}(y)=\frac{2y+\sqrt{y^2-12}}{3}$

تمارين و مسائل

1- باستعمال الدوال المشتقة للدوال المرجعية التالية عين معامل توجيه المماس لمنحنيات هذه الدوال عند النقطة ذات الفاصلة a المعطاة.

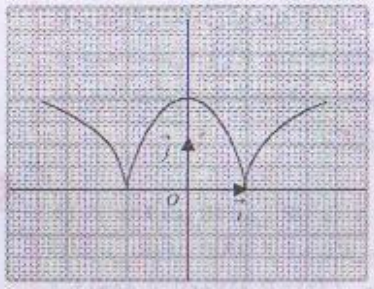
أ) $f(x)=x^2$ ، $a=-3$ ب) $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=1$ جـ) $K(x)=\sqrt{x}$ ، $a=4$

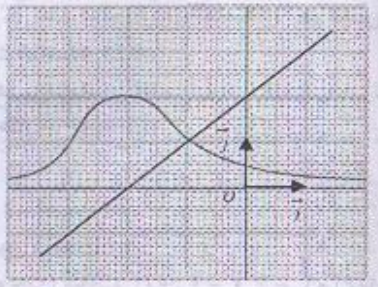
2- من اجل كل دالة من الدوال التالية ما هي الدالة القابلة للاشتقاق عند العدد المعطى ؟

أ) $f(x)=x\sqrt{x}$ ، $a=0$ ب) $f(x)=\sqrt{x-3}$ ، $a=3$

جـ) $f(x)=|x+3|x$ ، $a=-3$ د) $f(x)=\frac{|x|+1}{|x|-2}$ ، $a=0$

3- إليك التمثيلان البيانيان للدالتين f و g . بقراءة بيانية هل الدالتان قابلتان للاشتقاق عند القيمة -1 ؟ و في حالة نعم عين العدد المشتق لكل من الدالتين f و g عند -1 .





4- في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f :

أ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ب) $f(x)=(2x-1)^3$ جـ) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+3}$

د) $f(x)=3x-\frac{1}{2x+1}$ هـ) $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+4x+5}$ و) $f(x)=x^3\sqrt{x}$

ن) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ ي) $f(x)=2x(x^2+1)^3$

5- عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية على المجال I المعطى :

1) $f(x)=x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$ ب) $f(x)=\cos x\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$

جـ) $f(x)=\tan x$ ، $I=\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ د) $f(x)=\frac{2+\cos x}{2+\sin x}$ ، $I=[0\,,2\pi]$

هـ) $f(x)=x+\sin x$ ، $I=[0\,,2\pi]$

6- (γ) المنحنى البياني للدالة f المعرفة من أجل كل $x\neq -1$ بـ $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$.

1) أعط معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

2) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=2x$ ؟

3) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ ؟

7- f و g دالتان معرفتان على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$

1) برهن أن معامل توجيه المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو نفس معامل توجيه المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0,25 .

ب) ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص هذين المماسين ؟

8- 1) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x+5$

أ) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

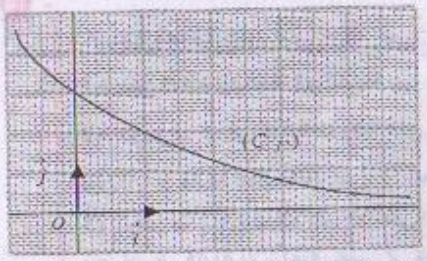
ب) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا محصورا بين -3 و -2 ثم أعط قيمة مقربة له بتقريب 10^{-1}

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$

أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) عين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ثم من أجل كل حل عين حصرا له بسعة 10^{-1} (طول مجال الحصر هو 10^{-1})

9- f دالة معرفة على $[-1,3]$ بحيث $f(1)=3$ و التمثيل البياني للدالة المشتقة (كما في الشكل) باستعمال خطوة قدرها 0,1 عين القيمة المقربة لـ $f(1,1)$.



10- f دالة قابلة للاشتقاق على $[-2,2]$ و بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{9-x^2}$.

1) باستعمال طريقة أولر بخطوة قدرها 0,5 عين قيمة مقربة لـ $f(2)$

2) ارسم المنحنى البياني المقرب للدالة f على المجال $[0,2]$ ثم على المجال $[-2,0]$

11- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\sqrt{1+x^2}\times f'(x)=f(x)$

2) استنتج أنه من أجل كل حقيقي x يكون $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$

12- 1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة من أجل كل $x\neq 2$ بـ $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$

2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$g:x\mapsto\frac{-x+3}{\sqrt{x}-2}$ ، $h:x\mapsto\frac{x^4+3}{x^2-2}$

$K:x\mapsto\sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$ ، $L:x\mapsto\frac{\sin^2 x+3}{\sin x-2}$

13- في كل حالة من الحالات التالية عين المجال الذي تكون فيه f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

أ) $f(x)=\sin^3(2x)$ ، ب) $f(x)=\cos^3(5x)$

جـ) $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ ، د) $f(x)=\frac{1}{4\cos^2 x-1}$

14 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

2) نرمز بـ g إلى الدالة المعرفة على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $g(x)=f(\cos(x))$
بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من اجل كل x من I.

3) نرمز بـ h إلى الدالة المعرفة على المجال $J=]4,+\infty[$ بـ $h(x)=f(\sqrt{x})$
بين أن h قابلة للاشتقاق على J ثم احسب $h'(x)$ من أجل كل x من J.

15 - إذا كانت f دالة فردية و قابلة للاشتقاق على I ماذا يمكن القول عن شفعية f'.
- إذا كانت f دالة زوجية و قابلة للاشتقاق على J ماذا يمكن القول عن شفعية f'.

16 باستعمال العدد المشتق اوجد نهاية f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{(x+3)^3-1}{x+2}$ ، $a=-1$ ب) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ ، $a=-1$

جـ) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ ، $a=0$ د) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ ، $a=0$

هـ) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$ ، $a=0$ و) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ، $a=1$

ن) $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، $a=\pi$ ي) $f(x)=\frac{\tan(x)}{x}$ ، $a=0$

.) $f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ ، $a=\frac{\pi}{2}$.) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$ ، $a=1$

17 1) a ، b عددان حقيقيان، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $y=4x+3$ ؟

2) a عدد حقيقي، g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=ax^3+3x^2+3x$
هل يوجد a بحيث الدالة g لها نهاية حدية عظمى من أجل $x=1$ ؟

18 a ، b عددان حقيقيان، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx^2+2$ و (γ) تمثيلها البياني. هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند $A(1,2)$ يوازي محور الفواصل ؟

19 f دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f على I.

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α من المجال $]1\ ,\ 2[$

3) اعط قيمة مقربة لـ α بتقريب 10^{-2} بالزيادة.

20 f دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد و متجانس.

2) a عدد حقيقي. اكتب معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(a,f(a))$.

ب) هل توجد مماسات لـ (γ) تمر من المبدأ O ؟

21 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث (لوحدة هي 2cm).

1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) بين أن (d) المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (γ)

2) احسب نهاية f عند -1 ماذا تستنتج بالنسبة إلى (γ) ؟

3) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

4) بين ان النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر لـ (γ).

5) ارسم المستقيمات المقاربة ثم (γ).

22 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب نهاية f عند أطراف مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.
2) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ).
3) عين بيانيا عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية
$x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$

23 f دالة معرفة على $]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[$ بـ $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.
2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.
3) هل f قابلة للاشتقاق عند -4 ؟ عند 0 ؟
4) احسب $f'(x)$ من اجل كل x من $]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$ و شكل جدول تغيرات الدالة f . ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ).

24 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ $f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2x+4}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) برهن أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل $x\neq -2$ يكون:
$f(x)=a(x-1)^2+\frac{b}{x+2}$
2) ادرس تغيرات الدالة f .
3) نسمي (Γ) المنحنى ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ و $x\neq -2$
P نقطة من (Γ) فاصلتها x و M نقطة من (γ) لها نفس الفاصلة.
أوجد المركبات السلمية للشعاع $\overrightarrow{PM}$ ثم استنتج أن لما x يؤول إلى $(+\infty)$ أو إلى $(-\infty)$ المسافة PM تؤول إلى الصفر، فسر هذه النتيجة هندسيا ثم ارسم (Γ) و (γ).

25 1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-2x^3-6x^2-1$
ادرس تغيرات g ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]-2,+\infty[$
2) لتكن f دالة معرفة على $]-2,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1-x^3}{x+2}$
أ) بين ان $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة على $]-2,+\infty[$

ب) عين اتجاه تغير f على $]-2,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
جـ) ارسم (γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس.

26 1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^3-3x-4$
أ) ادرس تغيرات g ثم شكل جدول تغيراتها.
ب) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم اعط قيمة مقربة له بتقريب 10^{-2} بالزيادة. و استنتج إشارة $g(x)$
2) f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$
أ) بين أن $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$
ب) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$.
جـ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (d).
د) ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f).

27 1) g دالة معرفة كما يلي $g(0)=0$ و من اجل كل $x\neq 0$ ، $g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
أ) بين أن g قابلة للاشتقاق عند 0.
ب) (γ) المنحنى البياني لـ g في معلم متعامد و متجانس .
تحقق أن محور الفواصل مماس لـ (γ) عند النقطة O.
2) أ) برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right)=0$ من اجل كل عدد صحيح k.
ب) α عدد حقيقي موجب تماما، و صغير بالقدر الكافي.
يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ مع k عدد طبيعي من المجال $[0,\alpha]$ لماذا ؟
3) هل صحيح ان المماس لـ (γ) عند A لا يقطع (γ) في نقطة اخرى مختلفة عن A بجوار A ؟

28 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ بـ $f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.
ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1
جـ) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان (d_1) و (d_2) حيث $y=-x-1$ ، (d_1) و $y=x+1$ ؛ (d_2) مقاربان لـ (γ).
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2)
جـ) أوجد معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى هذا المماس على المجال $]-1,1[$.
د) ارسم المستقيمات المقاربة و المماس و (γ).

29 -

f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x-1}}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) ا) اعط مجموعة تعريف f.
ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=-1$ من اليسار ماذا تستنتج ؟
جـ) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f عند $x_1=0$.
2) بين أن لـ (γ) مستقيمين مقاربين مائلين بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ يطلب تعيينهما.
3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) و المستقيمات المقاربة.

30 -

لتكن f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\frac{x^2+x+3\alpha+1}{x+\alpha}$ مع α عدد حقيقي، (γ_α) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) ادرس حسب قيم α تغيرات الدالة f_α.
2) بين أن المستقيم (d_α) ذا المعادلة $y=x+1-\alpha$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (d_α)
3) اثبت أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4) نضع $\alpha=2$ ارسم (γ_2).
5) بين أن النقطة $I(-2,-3)$ مركز تناظر لـ (γ_2).
6) ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2+(1-m)x+7-2m=0$
7) استنتج من السؤال 6) عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ :
$\sin^2\theta+(1-m)\sin\theta+7-2m=0$
8) لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ $g(x)=\frac{x^2-|x|+7}{|x|-2}$.
عين مجموعة تعريف g ثم بين أن g زوجية. و استنتج رسم (γ') بيان g.

31 -

f_1 و f_2 دالتان معرفتان بـ $f_1(x)=2x+\sqrt{4x^2-4}$ و $f_2(x)=2x-\sqrt{4x^2-4}$

و (γ_1) و (γ_2) منحناهما البيانيان في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ على الترتيب.

1) ادرس استمرار و قابلية اشتقاق f_1 على D_{f_1}
2) احسب $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}$ ماذا تستنتج ؟
3) ادرس تغيرات الدالة f_1.
4) بين أن لـ (γ_1) مستقيما مقاربا مائلا (d_1) معادلته $y=4x$ بجوار $(-\infty)$ ثم ارسم (d_1) و (γ_1).
5) بين أن f_1 تقابل من $]1,+\infty[$ في $]2,+\infty[$ ثم عين عبارة $f_1^{-1}(x)$ و ارسم (γ_1') بيانها في نفس المعلم السابق دون دراسة تغيراتها.
6) ا) ليكن S_O التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O عين عبارة S_O
ب) اثبت أن $S_O(\gamma_1)=(\gamma_2)$ ثم ارسم (γ_2).
7) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي إحداثياتها تحقق المعادلة $y^2-4xy+4=0$
ا) بين أن $(\Gamma)=(\gamma_1)\cup(\gamma_2)$.
ب) ليكن الشعاع $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، اكتب معادلة (Γ) في المعلم $\left(o,\vec{i},\vec{v}\right)$.

32 -

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-\sin x$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$، (وحدة الطول هي 3cm).
1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات f على $\mathbb{R}$.
2) برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x+1\le f(x)\le 2x-1$ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
3) نرمز بـ (d_1) و (d_2) إلى المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $y=2x-1$ و $y=2x+1$ عين نقط تقاطع (γ) مع (d_1) و (d_2) ثم حدد المماسات لـ (γ) عند هذه النقط.
4) ادرس شفعية f ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ).
5) قارن بين $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) ؟
6) ارسم بدقة المنحني (γ) على المجال $[0,\pi]$ ثم ارسم المماسات عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و π ثم (d_1) و (d_2) و استنتج رسم (γ) على المجال $[-3\pi,3\pi]$.

33 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+1$ إذا كان $x<0$
و $f(x)=x^2+x-\sin x+1$ إذا كان $x\ge 0$

1) بين ان f مستمرة عند 0 . هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
2) نفرض في هذا السؤال ان $x \in]0,+\infty[$.
أ) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f' على $]0,+\infty[$.
ب) احسب $f'(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0,+\infty[$.

34 -

1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $g(0)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
أ) باستعمال طريقة أولر بخطوة $0,5$ اعط قيمة مقربة لـ $g(0,5)$ و $g(1)$
ب) باستعمال طريقة أولر بخطوة $0,2$ ارسم (γ) المنحنى البياني المقرب لـ g على $[0,1]$.
ج) طبق الطريقة السابقة بخطوة $0,1$ ثم بخطوة $0,01$ و باستعمال الآلة الحاسبة البيانية او المجدول ارسم منحنا تقريبيا للدالة g .
- اعط قيمة مقربة لـ $g(1)$.
2) باستعمال اتجاه تغير الدالتين برهن انه من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $0 \le g(x) \le x$
3) لتكن f دالة الظل $(\tan)$
أ) برهن انه من اجل كل x من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $g'(f(x))=\frac{1}{1+\tan^2 x}$
ب) استنتج مشتق الدالة gof ثم احسب $gof(0)$
ج) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من اجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يكون $(gof)(x)-x=0$ و استنتج أيضا القيمة المضبوطة لـ $g(1)$

35 -

f_n دالة عددية معرفة على $]-\infty,1]$ بـ $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ مع n عدد طبيعي غير معدوم و نرمز بـ (γ_n) إلى التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.
1) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند 1 ماذا تستنتج ؟
2) عين حسب قيم n نهاية f_n عند $(-\infty)$
3) أ) ادرس تغيرات f_n (ميز الحالتين n فردي و n زوجي)
ب) في كل حالة من هاتين الحالتين شكل جدول تغيرات f_n .
4) ارسم (γ_1) و (γ_2) (الوحدة هي $4cm$)
5) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، عين حسب قيم x الوضع النسبي لـ (γ_n) و (γ_{n+1})

36 -

لتكن الدالة العددية f_α المعرفة بـ $f_\alpha(x)=\frac{\sin^2 x-\alpha^2}{\cos^2 x-\alpha^2}$ ، α وسيط حقيقي موجب ، و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α .
1) عين حسب قيم α مجموعة تعريف الدالة f_α .
2) إذا كان $\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ بين أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
3) ادرس تغيرات الدوال f_0 ، f_1 ، $f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ثم ارسم (γ_0) ، (γ_1) ، $\left(\gamma_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

37 -

f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x)=\alpha x+2\sqrt{\alpha^2x^2-1}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، (γ_α) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) اوجد مجموعة تعريف الدالة f_α ثم ضعها على شكل مجالات.
2) هل المنحنى (γ_α) له مستقيمات مقاربة مائلة ؟
3) أ) ادرس قابلية اشتقاق f_α عند $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\alpha}$ ماذا تستنتج ؟
ب) نضع $\alpha=\frac{1}{3}$ ، ارسم $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$
ج) برهن أن $f_{\frac{1}{3}}$ تقبل دالة عكسية $f_{\frac{1}{3}}^{-1}$ يطلب رسم تمثيلها البياني في نفس المعلم.
4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=\frac{-1}{3}x-2\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$
أثبت أن (C_g) و $\left(\gamma_{\frac{1}{3}}\right)$ متناظران بالنسبة إلى $(x'x)$ ثم ارسم (C_g) .

38 -

f دالة معرفة بـ $f(x)=|x-1|+\frac{2}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني.
1) ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق f عند $x=1$
2) بين أن (d_1) : $y=x-1$ ، (d_2) : $y=-x+1$ مستقيمان مقاربان لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ على الترتيب.
3) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها. و ارسم (γ) و (d_1) و (d_2)
4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=|x|-1+\frac{2}{1+|x|}$
عين مجموعة تعريف الدالة g ثم بين ان g زوجية و ارسم (γ') بيان g استنتاجا.

39

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=\frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 2cm).

1) أ) عين مجموعة تعريف f .

ب) برهن أن المنحني (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ كمحور تناظر له.

جـ) اثبت أن f دورية و دورها 2π .

د) اشرح لماذا يمكن اقتصار دراسة f على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$f'(x)=\cos x\left[\frac{3}{(2+\sin x)^2}-1\right]$$

ب) برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ثم احسب $f(\alpha)$.

جـ) شكل جدول تغيرات f على المجال $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

د) احسب $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ثم اعط قيمة تقريبية لـ α .

3) أ) ارسم (γ) على المجال $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

ب) ارسم (γ_1) حيث (γ_1) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من (γ) و $\frac{\pi}{2}\geq x\geq 0$ في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm).

4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x)=f(x)-x$

أ) برهن انه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $g(x_0)=0$

ب) حدد بيانيا حل x_0 انطلاقا من (γ_1)

جـ) تحقق ان x_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ على $\mathbb{R}$.

5) لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$ و لتكن النقطتان $A_n(U_n\ ,\ U_{n+1})$ ، $B_n(U_{n+1}\ ,\ U_{n+1})$

أ) على اي منحني نجد النقطتين A_n و B_n ؟

ب) أنشئ النقط A_0 ، B_0 ، A_1 ، B_1 ، A_2 ، B_2 في نفس المعلم و ذلك باستعمال السؤال (أ) و بدون حساب تراتيب هذه النقط ما عدا النقطة A_0 .

جـ) مثل الأعداد الحقيقية U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على المحور $\left(o,\vec{i}\right)$.

د) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n\in\left[0\ ,\ \frac{1}{2}\right[$

هـ) برهن أن من أجل كل x من $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ يكون $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$ ثم بين انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $|U_{n+1}-x_0|\leq\frac{2}{3}|U_n-x_0|$

و) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$|U_n-x_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-x_0|$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المتتالية (U_n) ؟

40

في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر الدائرة (C) ذات المعادلة $x^2+y^2=1$ و النقطة I ذات الإحداثيين $(1,0)$ ، M و N نقطتان من (C) بحيث $(MN)\perp(OI)$ و H نقطة تقاطع المستقيمان (OI) و (MN) ، نضع $\overrightarrow{OH}=x\vec{i}$.

1) احسب مساحة المثلث MNI بدلالة x .

2) f الدالة المعرفة على $[-1\ ,\ 1]$

بـ $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

أ) أوجد قيم f عند أطراف مجال التعريف.

ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند 1- و 1 ثم استنتج معادلات المماسات للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 1- و 1.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

د) ارسم (C_f) في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm)

3) من أجل اي قيمة لـ x مساحة المثلث MNI أعظمية ؟ ما هي هذه المساحة ؟

4) من أجل اي قيمة لـ x مختلفة عند الصفر تكون مساحة المثلث MNI تساوي 1 (يعطى x بتقريب 0,01 بالزيادة).

41

لتكن (C) نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها r ، $KHMN$ مستطيل مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.

1) عين قيمة x بحيث المستطيل له مساحة أعظمية ، ما هي عندئذ قيمة y ؟

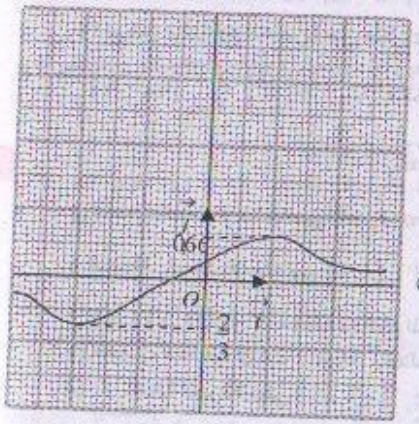
2) نسمي الآن θ قيس الزاوية $A\hat{O}M$

ـ عبر بدلالة θ عن مساحة المستطيل $KHMN$

ـ من اجل اي قيمة لـ θ تكون مساحة المستطيل اعظمية ؟

42 - لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و الدالة f' منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور.

من اجل كل معلومة من المعلومات التالية ما هي الصحيحة و الخاطئة منها ؟



1) f تقبل قيمة صغرى من اجل $x=\frac{-1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=0$

3) f متناقصة تماما على $]-\infty,1]$

4) إذا كان $f(-2)=1$ فإنه من اجل كل $x\in[-2,1]$ يكون $f(x)\geq 1$

5) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2- هي $y=\frac{-2}{3}$.

43 - 1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x^3+x^2-1$

ا) ادرس اتجاه تغير g على $\mathbb{R}$.

ب) برهن ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم اعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-1} بالزيادة. و عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) لتكن f دالة معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$

ا) برهن ان من أجل كل $x\neq 0$ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير f و احسب نهاية f عند 0 ، $+\infty$ ، $-\infty$

جـ) برهن أن $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) نسمي (γ) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 3cm) و لتكن I نقطة من (γ) فاصلتها -1 و J نقطة من (γ) فاصلتها 1.

ا) تحقق ان المستقيم (IJ) مماس لـ (γ) عند J.

ب) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (γ) عند I ثم ادرس وضعية (γ) بالنسبة لهذا المماس.

جـ) باستعمال كل النتائج السابقة ارسم (γ) (تاخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة مقربة لـ α).

4 الدرس

الدَّالةُ الأُسِّيَةُ

1. دراسة المعادلة التفاضلية $f=f'$ مع $f(0)=1$

منال ـ ◆

تقبل انه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=f'(x)$ و $f(0)=1$.

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة f باستعمال مجدول (طريقة اولر) على $[-1,1]$.

1) باستعمال التقريب التالفي $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$

ا) عين قيمة تقريبية لـ $f(0,5)$ و $f(1)$ بخطوة $h=0,5$

ب) عين قيمة تقريبية لـ $f(-0,5)$ و $f(-1)$ بخطوة $h=-0,5$

2) على المجال $[0,1]$ نختار خطوة $h=0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

ا) بين ان المتتالية (x_n) حسابية و (y_n) متتالية هندسية ثم اكتب x_n و y_n بدلالة n.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ مع $0\leq n\leq 10$ و $n\in\mathbb{N}$.

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[0,1]$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 0,1)

3) على المجال $[-1,0]$ نختار خطوة $h=-0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

ا) اكتب x_n و $y_n=f(x_n)$ بدلالة n.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ حيث $0\geq n\geq 10$

ج) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[-1,0]$ في نفس المعلم السابق.

✓ الحل

1) بما ان $f'(a)=f(a)$ فان $f(a+h)\approx(1+h)\times f(a)$

ا) $f(0,5)=f(0+0,5)=(1+0,5)f(0)=1,5\times 1=1,5$

$f(1)=f(0,5+0,5)=(1+0,5)f(0,5)=1,5\times 1,5=2,25$

ب) $f(-0,5)=f(0-0,5)=(1-0,5)f(0)=0,5$

$f(-1)=f(-0,5-0,5)=(1-0,5)f(-0,5)=0,5\times 0,5=0,25$

2) ا) النقطة M_0 احداثياتها $(0,1)$ و النقطة M_1 إحداثياتها (x_1,y_1) حيث $x_1=x_0+h$ و $y_1=(1+h)y_0$.

النقطة M_2 إحداثياتها (x_2,y_2) حيث $y_2=(1+h)y_1$ و $x_2=x_1+h$ و هكذا دواليك

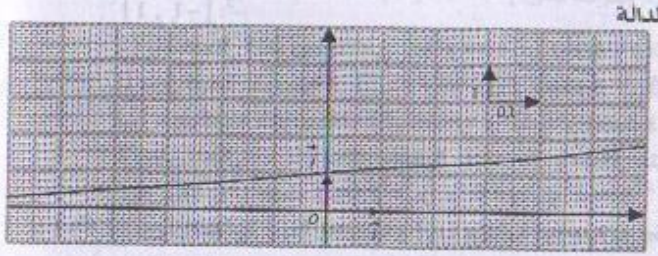
النقطة M_n إحداثياتها تحقق $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=(1+h)y_{n-1}$ و منه نستنتج ان (x_n) متتالية حسابية أساسها h و (y_n) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$.

بما ان $h=0,1$ فان $x_n=x_0+nh=0,1n$ و $y_n=y_0\times(1+h)^n$ اي $y_n=(1,1)^n$

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,94	2,14	2,35	2,59

ج) المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من قطع $[M_kM_{k+1}]$ حيث $n-1\geq k\geq 0$ و $M_k(0,1k\ ,\ (1,1)^k)$



3) ا) المتتالية (x_n) معرفة كما يلي $x_n=x_{n-1}+h$

اي $x_n=x_{n-1}-0,1$ و عليه (x_n) متتالية حسابية أساسها -1 إذن $x_n=-0,1n$.

المتتالية (y_n) معرفة كمايلي $y_n=(1-0,1)y_{n-1}$ أي $y_n=0,9y_{n-1}$

وبالتالي (y_n) متتالية هندسية أساسها $0,9$ و عليه $y_n=1\times(0,9)^n$.

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
y_n	1	0,9	0,81	0,72	0,65	0,59	0,53	0,47	0,43	0,38	0,34

خاصية

إذا وجدت دالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ فإنها لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

الإثبات

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' معرفة بـ

$h'(x)=f'(x)f(-x)-f'(-x)f(x)$

وبما انه $f''(x)=f(x)$ فإن عبارة $h'(x)$ تصبح $h'(x)=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0$

إذن h دالة ثابتة.

بما انه $f(0)=1$ فإن $h(0)=f(0)f(0)=1$ و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=1$

بما انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)f(-x)=1$ فإن $f(x)$ غير معدومة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.

الإثبات

وجود الدالة f يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية f.

لتكن g دالة أخرى قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $g'=g$ و $g(0)=1$.

الدالة $\frac{g}{f}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}=0$

إذن الدالة $\frac{g}{f}$ ثابتة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $\left(\frac{g}{f}\right)(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{1}=1$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ اي $g(x)=f(x)$ و هذا يدل على أن f وحيدة.

2. تعريف الدالة الاسية

نسمي دالة أسية، الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ ونرمز لها بـ exp و نكتب $f(x)=\exp(x)$.

❸ . خواص الدالة الأسية

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها اي $\exp'(x)=\exp(x)$

2) الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$

3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b لدينا $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n لدينا

$$\exp(2a)=(\exp(a))^2 \quad ، \quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)} \quad ، \quad \exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$\exp(na)=(\exp(a))^n$$

5) مهما يكن العدد الحقيقي a يكون $\exp(a)>0$

الإثبات

نتحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف

3) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(a+b-x)f(x)$ حيث f الدالة الأسية.

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-f(a+b-x)f(x)+f(a+b-x)f(x)=0$

إذن g دالة ثابتة.

بما أن $g(0)=f(a+b)f(0)=f(a+b)$ و $g(b)=f(a)f(b)$ فإن

$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ اي $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) - $\exp(2a)=\exp(a+a)=\exp(a)\times\exp(a)=(\exp(a))^2$

-لدينا $\exp(-a+a)=\exp(-a)\times\exp(a)$ و لدينا من جهة أخرى $\exp(-a+a)=1$

إذن $1=\exp(-a)\times\exp(a)$ و بالتالي $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$

- $\exp(a-b)=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- نتقبل أن $\exp(na)=(\exp(a))^n$ (نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع من أجل n طبيعي).

و من أجل n عدد صحيح سالب فإن $-n$ عدد طبيعي و لدينا

$$\exp(na)=(\exp(-(-na)))=\frac{1}{\exp(-na)}=\frac{1}{(\exp a)^{-n}}=(\exp a)^n$$

5) بكتابة $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ فيكون $\exp(a)=\exp\left(\frac{a}{2}\right)\times\exp\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$

و منه نستنتج $\exp(a)>0$.

مبرهنة

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، غير معدومة، حيث

$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ و $f'(0)=1$

الإثبات

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:

(قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$) ، (غير معدومة) ، ($f'(0)=1$) ، ($f(a+b)=f(a)\times f(b)$).

- لتكن f دالة اخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من أجل a عدد حقيقي معطى ومن أجل كل عدد حقيقي x كيفي $f(x+a)=f(x)\times f(a)$.

الدالة $x\mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين ، والدالة $x\mapsto f(x)f(a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن $f'(x+a)=f(a)\times f'(x)$

من أجل $x=0$ لدينا $f'(a)=f(a)f'(0)$ و بما أن $f'(0)=1$ فإن $f'(a)=f(a)$ من أجل كل a

إذن الدالة f حل للمعادلة $f'=f$.

بالإضافة إلى ذلك $f(a+0)=f(a)\times f(0)$ اي $f(a)=f(a)\times f(0)$

لكن $f(a)$ غير معدوم إذن $f(0)=1$

و عليه f هي حل للمعادلة $f'=f$ و $f(0)=1$ و هذا يعني أن f هي الدالة الأسية.

تمرين تدريبي ❶

f ، g ، h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\exp(x)+2x$ ، $g(x)=\exp(x-1)$ و $h(x)=\exp(-2x)$

1) عين اتجاه تغير كل دالة .

ب) أوجد علاقة بين g و g' و ايضا بين h و h' .

✓ الحل

1) - الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto\exp x$ و $x\mapsto 2x$ و لدينا $f'(x)=\exp x+2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp x>0$ ومنه $f'(x)>0$ اي أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- $g(x)=\exp(x)\times\exp(-1)$

الدالة g هي جداء الدالة $\exp$ بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)$ ومنه

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x-1)$ إذن $g'(x)>0$ و منه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- $h(x)=(\exp(-x))^2=\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$ إذن الدالة h من الشكل $\left(\frac{1}{u}\right)^2$ حيث $u(x)=\exp(x)$

$$h'(x)=\frac{-2\exp(x)}{(\exp(x))^3}=\frac{-2}{(\exp(x))^2}=-2\exp(-2x)$$

لكن $\exp(-2x)>0$ إذن $h'(x)<0$ و منه نستنتج أن h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) $g'(x)=\exp(x-1)=g(x)$ و $h'(x)=-2\exp(-2x)=-2h(x)$

تمرين تدريبي ❷

1) بسط العبارات التالية :

$A=(\exp(x))^3$ ، $B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)$ ، $C=\dfrac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}$.

ب) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\dfrac{\exp x}{\exp x-x}=\dfrac{1}{1-x\exp(-x)}$

و $\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\dfrac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$

✓ الحل

1) $A=(\exp(x))^3=\exp(x)\times\exp(x)\times\exp(x)=\exp(2x)\times\exp(x)=\exp(3x)$

$B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)=\exp(3-2x+5x-7)=\exp(-4+3x)$

$C=\dfrac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}=\dfrac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}}=\exp(3x-1)\times\exp(3x)=\exp(3x-1+3x)$

$=\exp(6x-1)$

ب) $\dfrac{\exp(x)}{\exp(x)-x}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(x)\left[1-x\exp(-x)\right]}=\dfrac{1}{1-x\exp(-x)}$

$\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\dfrac{\exp(x)\left[1-\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}{\exp(x)\left[1+\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}=\dfrac{1-(\exp(-x))^2}{1+(\exp(-x))^2}=\dfrac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$

❹ . الترميز e^x

صورة الواحد بالدالة الأسية نرمز له بـ e اي $\exp(1)=e$.

العدد e هو عدد حقيقي و القيمة التقريبية له هي $2,71828$

الخواص المبرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة $\exp(n)=\exp(n\times1)=(\exp(1))^n=e^n$

من أجل كل عدد صحيح n .

نرمز بـ e^x إلى صورة العدد الحقيقي x بالدالة الأسية و نكتب $\exp(x)=e^x$

ملاحظة

العدد e عدد غير ناطق.

خواص

خواص الدالة الأسية المبرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

1) الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها

2) $e^0=1$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون $e^x>0$.

3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n :

$e^{a+b}=e^a\times e^b$ ، $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ ، $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ ، $(e^a)^n=e^{na}$

4) من أجل كل الأعداد الحقيقية a_1 ، a_2 ، ... ، a_p حيث p عدد طبيعي لدينا

$e^{a_1}e^{a_2}\times\ldots\times e^{a_p}=e^{a_1+a_2+\ldots+a_p}$

تمرين تدريبي ❶

بسط العبارات التالية :

$A=e^{-3}\times(e^2)^4$ ، $B=(e^{-x})\times(e^x)^3$

$C=e^{2x}\times e^{-2x}$ ، $D=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

✓ الحل

$A=e^{-3}\times e^8=e^{-3+8}=e^5$

$B=e^{-x}\times(e^x)^3=e^{-x}\times e^{3x}=e^{-x+3x}=e^{2x}$

$C=e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^0=1$

$D=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^xe^{-x}}{e^{2x}+e^x}-\dfrac{e^{-2x}e^{2x}}{e^{2x}+e^{-x}e^{2x}}$

$=\dfrac{e^0}{e^{2x}+e^x}-\dfrac{e^0}{e^{2x}+e^x}=\dfrac{1}{e^{2x}+e^x}-\dfrac{1}{e^{2x}+e^x}=0$

❺ . دراسة الدالة الأسية

1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

1) الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ و إذا كان $x<0$ فإن $e^x<1$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

4) $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ و من اجل h قريب من الصفر $e^h\approx1+h$

الإثبات

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp'(x)=\exp(x)$ و $\exp(x)\rangle0$
إذن الدالة الأسية متزايدة على $\mathbb{R}$

2) بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال $]0,+\infty[$ و $\exp(0)=1$
فإنه من أجل كل $x\rangle0$ يكون $\exp(x)\rangle1$
- بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على $]-\infty,0[$ و $\exp(0)=1$
فإنه من أجل كل $x\langle0$ يكون $\exp(x)\langle1$

3) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-1$ و $f'(0)=0$
- على المجال $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x)\langle0$ و منه f متناقصة تماما على مجال $]-\infty,0[$.
- على المجال $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)\rangle0$ و منه f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$
و بما أن $f(0)=1$ فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى تساوي 1 .
إذن من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)\geq1$
و منه نستنتج ان $f(x)\rangle0$ على $\mathbb{R}$ و هذا يعني ان $e^x\rangle x$.
و بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (حسب نظرية الحصر)
- نضع $X=-x$ و بالتالي لما x يؤول إلى $(-\infty)$ فإن X يؤول إلى $(+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$$

4) - الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1
و منه نستنتج بالتعريف أن $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$
- من النهاية السابقة نستنتج أن في جوار الصفر $e^h=1+h+\phi(h)$ حيث $\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=0$
إذن $e^h\approx1+h$ بجوار الصفر.

تمرين تدريبي ❶

لتكن f و g دالتين معرفتين بـ $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}$. $g(x)=\frac{e^x-1}{x^3}$
احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
ثم احسب $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

✓ الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2}=+\infty$$

لان $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

تمرين تدريبي ❷

1) باستعمال التقريب التالفي لـ e^x برهن انه عندما يكون العدد الطبيعي n كبيرا بالقدر الكافي يكون $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2) لتكن (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ احسب بقريب 10^{-10} الحدود U_{100} ، U_{1000} ثم قارنها مع e .

✓ الحل

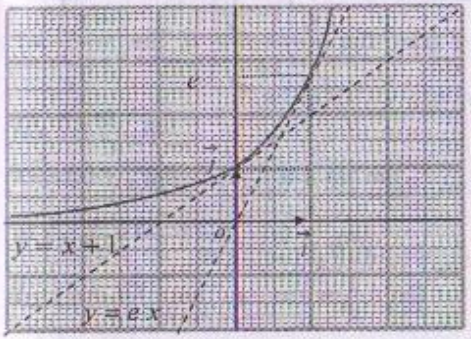
1) بجوار الصفر لدينا $e^h\approx h+1$
و بوضع $h=\frac{1}{n}$ مع n كبير بالقدر الكافي نجد $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}$
و برفع الطرفين إلى القوة n نجد $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ أي $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) $U_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,7048138294$

$U_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169239325$

نلاحظ أن U_{100} و U_{1000} قيم مقربة إلى 10^{-10} للعدد e
و كلما كان n كبيرا جدا كلما اقتربنا من العدد e
و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=e$

2.5 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$\exp(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			0		

- المنحنى الممثل للدالة exp يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب له بجوار $(-\infty)$
- المماسان لمنحنى الدالة exp عند 1 و 0 معادلتاهما على الترتيب $y=ex$ و $y=x+1$
- بما أن $e^x > x$ من أجل كل x فإن المنحنى الممثل للدالة exp يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$

3.5 الوضع النسبي لبيان الدالة exp و مماساته

نسمي (γ) المنحنى البياني للدالة exp في معلم متعامد ومتجانس، و ليكن a عدد حقيقي و لتكن $M(a, e^a)$ نقطة من (γ).

معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند M هي $y = e^a + e^a(x-a)$.

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T) ندرس إشارة المقدار $e^x - \left[e^a + e^a(x-a)\right]$.

نضع $f(x) = e^x - \left[e^a + e^a(x-a)\right]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما : $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto -\left[e^a + e^a(x-a)\right]$ و لدينا $f'(x) = e^x - e^a$

بما ان الدالة exp متزايدة تماما فإن

- إذا كان $x > a$ يكون $e^x > e^a$ و عليه $f'(x) > 0$
- إذا كان $x < a$ يكون $e^x < e^a$ و عليه $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\searrow$	0	$+$	
$f(x)$			$f(a)=0$	$\nearrow$	

• من جدول تغيرات f نلاحظ انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) \geq 0$ وهذا يعني أن المنحنى للدالة exp يقع فوق المماس (T) و يمسه في النقطة الوحيدة $M(a, e^a)$.

4.5 نهايات شهيرة

مبرهنة

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

الإثبات

لتكن f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

f و f' قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = e^x - x$ و $f''(x) = e^x - 1$.

من اجل كل x من $[0, +\infty[$ لدينا $f''(x) \geq 0$ و منه الدالة f' متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

بما ان $f'(0) = 1$ فإن $f'(x) > 0$ و عليه فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

و بما ان $f(0) = 1$ فإن $f(x) \geq 1 > 0$.

$f(x) > 0$ يكافئ $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماما x نجد $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

• بوضع $X = -x$ يكون $x e^x = -X e^{-X} = \dfrac{-X}{e^X} = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)} = 0$ لأن $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$

ملاحظة

من أجل قيم كبرى لـ x ، فالعددان x و e^x يأخذان قيما كبرى جدا و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ فإن e^x أكبر بكثير عن x نقول أن الدالة الأسية تتفوق عن الدالة $x \mapsto x$.

تمرين تدريبي ❶

1) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x - 2x + 1$ و $g(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 2}$

احسب نهايات f و g عند $+\infty$ و $-\infty$

2) h و κ دالتان معرفتان كما يلي $h(x) = \dfrac{x+2}{3e^x - 1}$ و $\kappa(x) = \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$

أ) احسب نهاية h عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) احسب نهاية κ عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$ و 1

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(3-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x-2}{e^x+2} = -\dfrac{2}{2} = -1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x-2x+1\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+1) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}+\dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

2) 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{3e^x-1} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3e^x-1\right) = -1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \kappa(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X-1}{X}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \kappa(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right)\times\dfrac{1}{x-1} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right) = -1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1} \kappa(x) = \lim\limits_{X\to0} \dfrac{e^X-1}{X} = 1$ حيث $X = x-1$

تمرين تدريبي ❷

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x - x - 2$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حلان في $\mathbb{R}$. ثم ارسم (γ).

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

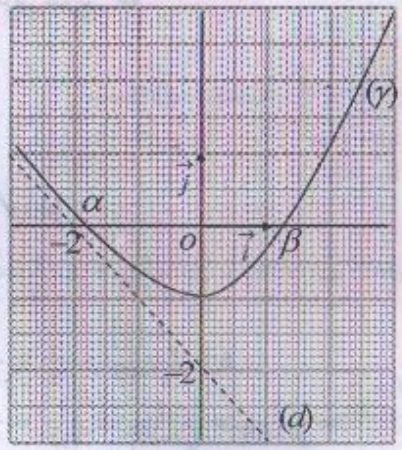
- f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$ و بالتالي $f'(x) < 0$ أي f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

- إذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$ و بالتالي $f'(x) < 0$ أي f متناقصة تماما على $]-\infty, 0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



2) - بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $]-\infty, 0[$

و $0 \in]-1, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = 0$

لها حل وحيد α من $]-\infty, 0[$

- بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $]0, +\infty[$

و $0 \in]-1, +\infty[$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$

لها حلا وحيدا β من $]0, +\infty[$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β على $\mathbb{R}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x-2) = 0$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x-2$ مقارب لـ (γ) بجوار $-\infty$

5.5 المعادلات والمتراجحات

خاصية

1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماما m فالمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $Ln(m)$ ونكتب $x = Ln(m)$

2) من أجل كل عددين حقيقيين a و b :

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

الإثبات

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالإضافة إلى كونها متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m فالمعادلة ذات المجهول x التالية $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا الذي نرمز له بـ $Ln(m)$.

2) بما أن الدالة الأسية تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$ ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$.

ملاحظة

بما أن المعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا هو $Ln(m)$ فإنه يمكن كتابة $e^{Ln(m)} = m$.

تمرين تدريبي ❶

بسط الأعداد التالية : $A = e^{Ln(2)-Ln(3)}$ ، $B = \dfrac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}}$ ، $C = e^{-2Ln(3)}$

$D = e^{2Ln(5)}$ ، $E = e^{Ln(3)-2Ln(2)}$

✓ الحل

$$A = e^{Ln(2)} \times e^{-Ln(3)} = 2 \times \frac{1}{e^{Ln(3)}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2Ln(3)} = \frac{1}{e^{2Ln(3)}} = \frac{1}{\left(e^{Ln(3)}\right)^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2Ln(5)} = \left(e^{Ln(5)}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{Ln(3)-2Ln(2)} = e^{Ln(3)} \times \frac{1}{e^{2Ln(2)}} = 3 \times \left(\frac{1}{e^{Ln(2)}}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرين تدريبي ❷

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{x^2+3x} = e^4$ ، ب) $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ ، جـ) $e^{-3x+2} \geq 3$

✓ الحل

- المعادلتان $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ و $U(x) = V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول
- المتراجحتان $e^{U(x)} < e^{V(x)}$ و $U(x) < V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

أ) المعادلتان $e^{x^2+3x} = e^4$ و $x^2+3x = 4$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المعادلة $x^2+3x = 4$ تكافئ المعادلة $x^2+3x-4 = 0$ التي حلاها هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -4$

إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{x^2+3x} = e^4$ هي $S = \{1, -4\}$.

ب) المتراجحتان $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ و $2x+1 < x^2-x-3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المتراجحة $2x+1 < x^2-x-3$ تكافئ المتراجحة $x^2-3x-4 > 0$

و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S =]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

جـ) بما أن $e^{Ln3} = 3$ فإن المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$

المتراجحتان $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$ و $-3x+2 \geq Ln3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المتراجحة $-3x+2 \geq Ln3$ هي $\left]-\infty, \dfrac{2-Ln3}{3}\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = \left]-\infty, \dfrac{2-Ln3}{3}\right[$

تمرين تدريبي ❸

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{-x} - 3 \geq 0$ جـ) ، $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ ب) ، $e^{2x} = \left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3}$

✓ الحل

لحل معادلة من الشكل $a e^{2x} + b e^x + c = 0$ نضع $e^x = X$

الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد x_0 بحيث $x_0 = Ln(X_0)$ حيث X_0 هو الحل الموجب للمعادلة $a X^2 + b X + c = 0$

أ) $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3} = e^{-2x} \times e^{-3} = e^{-2x-3}$

و منه المعادلة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x} = e^{-2x-3}$

و هذه الأخيرة تكافئ $2x=-2x-3$

مجموعة حلول المعادلة $2x=-2x-3$ هي $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

و منه مجموعة حلول المعادلة أ) هي $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ب) بوضع $X=e^x$ المعادلة ب) تكتب على الشكل $X^2-3X-4=0$...(I)

حلا المعادلة (I) هما $X_0=4$ و $X_1=-1$

$X_1=-1$ مرفوض و $X_0=4$ مقبول

$X_0=e^{x_0}$ يكافئ $x_0=Ln(X_0)=Ln\,4$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{Ln\,4\}$.

جـ) $e^{-x}-3\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\geq e^{Ln\,3}$ يكافئ $-x\geq Ln\,3$ يكافئ $x\leq -Ln\,3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=]-\infty\,,-Ln\,3]$

6. الدالة المركبة $x\mapsto e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.

الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مجموعة تعريف الدالة $\exp ou$ هي مجموعة تعريف الدالة u

مبرهنة

1) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=(\exp ou)(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

2) اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة u

الإثبات

1) $f'(x)=(\exp ou)'(x)=u'(x)\times\exp'(u(x))$

لكن $\exp'(u(x))=e^{u(x)}$ و عليه $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

2) بما أن $e^{u(x)}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة $x\mapsto u(x)$

مثال 1

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=e^{2x+3}$ ، ب) $f(x)=e^{2x^2+x}$ ، جـ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

د) $f(x)=e^{\sin x}$ ، هـ) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$

✓ الحل

أ) الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2\times e^{2x+3}$

ب) الدالة $x\xrightarrow{u}2x^2+x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(4x+1)e^{2x^2+x}$

جـ) الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{1}{x}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}\sin(x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

هـ) الدالة $x\mapsto\frac{x}{x^2+1}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}}$

تمرين تدريبي 1

احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{2x+3}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{2x+1}{x-2}}$

3) $f(x)=e^{-x^2}$ ، 4) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

✓ الحل

1) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{2x+1}{x-2}$ عند $(+\infty)$ هي 2

و نهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند 2 هي e^2 و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e^2$

3) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}-x^2$ عند $(+\infty)$ هي $(-\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ لما x يؤول $(-\infty)$ هي 0 و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تمرين تدريبي ❷

لتكن f_k و g_k دالتين معرفتين كما يلي $f_k(x)=e^{-kx}$ و $g_k(x)=e^{-kx^2}$
مع $k>0$ ، (γ_k) و (Γ_k) المنحنيين المثليين لـ f_k و g_k على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة f_k

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2)

2) أ) أدرس تغيرات الدالة g_k

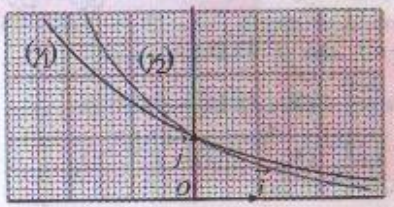
ب) أدرس الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ثم ارسم (Γ_1) و (Γ_2)

✓ الحل

1) أ) الدالة $x \xrightarrow{u} -kx$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f_k معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'_k(x)=(-k)e^{-kx}$

بما أن $k>0$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'_k(x)<0$ أي أن f_k متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة f'_k	$-$	
تغيرات f_k	$+\infty$ ↘	0



بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-kx)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-kx}=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(-kx)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-kx}\right)=+\infty$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-f_1(x)$.

$$f_2(x)-f_1(x)=e^{-2x}-e^{-x}=e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)=e^{-x}\left(\frac{1-e^{x}}{e^{x}}\right)$$

$f_2(x)-f_1(x)=0$ يكافئ $1-e^{x}=0$ يكافئ $x=0$

- إذا كان $x<0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)<0$ و بالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)
- إذا كان $x>0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)>0$ وبالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى (γ_k) في جوار $(-\infty)$

2) دراسة تغيرات الدالة g_k

الدالة $x \xrightarrow{v} -kx^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

اذن الدالة g_k معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $g'_k(x)=-2kxe^{-kx^2}$

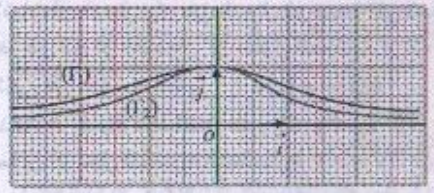
$g'_k(x)=0$ يكافئ $x=0$

- إذا كان $x<0$ فإن $g'_k(x)>0$ و بالتالي g_k متناقصة تماما على $]-\infty,0]$
- إذا كان $x>0$ فإن $g'_k(x)<0$ و بالتالي g_k متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-kx^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-kx^2)=-\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}g_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g_k(x)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'_k(x)$	$+$	0	$-$
تغيرات g_k	0 ↗	1	↘ 0



ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ندرس إشارة المقدار $g_2(x)-g_1(x)$

$$g_2(x)-g_1(x)=e^{-2x^2}-e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(\frac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right)$$

$g_2(x)-g_1(x)=0$ يكافئ $x=0$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $x^2>0$

وبما أن الدالة exp متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإن $e^{x^2}>e^{0}$ أي $e^{x^2}>1$

إذن $g_2(x)-g_1(x)<0$ و هذا يعني أن (Γ_2) يقع تحت (Γ_1)

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (Γ_1) و (Γ_2) في جوار $+\infty$ و $-\infty$
- الدالة g_k زوجية وبالتالي منحناها يقبل المستقيم $(x=0)$ كمحور تناظر له

❼ - المعادلات التفاضلية

نسمي معادلته تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق على I و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل:

$y'=ay+b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq0$

1.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$.

مبرهنة ❶

حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$ على $\mathbb{R}$ هي دوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

الإثبات

من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $f_k'(x)=ake^{ax}$

إذن $f_k'(x)=af_k(x)$ و هذا يعني أن f_k حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$.

• وحدانية الدوال f_k :

لإثبات أن الدوال f_k هي الدوال الوحيدة التي تحقق $y'=ay$

نفرض أنه توجد دوال g حلول للمعادلة $y'=ay$ و نبين أن g من الشكل f_k.

لتكن h دالة معرفة بـ $h(x)=g(x)e^{-ax}$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=e^{-ax}(g'(x)-ag(x))$

بما أن g حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ فإن $g'(x)-ag(x)=0$

و عليه نجد $h'(x)=0$

إذن الدالة h ثابتة

وهذا يعني من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=k$

إذن $g(x)=ke^{ax}$

مبرهنة ❷

من أجل كل ثنائية (x_0,y_0) المعادلة $y'=ay$ تقبل حلا وحيدا f بحيث $f(x_0)=y_0$

الإثبات

القول أن $f_k(x_0)=y_0$ يكافئ القول أن $ke^{ax_0}=y_0$

إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ k هي $y_0e^{-ax_0}$

و الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$

مثال . ◆

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'=-3y$ مع $(x_0,y_0)=(1,3)$

✓ الحل

حل المعادلة التفاضلية المحطاة هي الدالة f المعرفة من اجل كل x بالعبارة $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$ و بتعويض a و x_0 و y_0 نجد $f(x)=3e^{-3(x-1)}$

2.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$

مبرهنة

الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$ هي الدوال f_k المعرفة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .

الإثبات

نفرض أن الدالة f القابلة للاشتقاق على I هي حلا للمعادلة $y'=ay+b$ عندئذ نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع $g(x)=f(x)+\frac{b}{a}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f'(x)$

لكن $f'(x)=af(x)+b=ag(x)$

إذن $g'(x)=ag(x)$ و هذا ما يثبت أن g هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$

إذن g هي الدالة $x\mapsto ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

بالعكس كل دالة f من الشكل $x\mapsto ke^{ax}-\frac{b}{a}$ هي حل للمعادلة $y'=ay+b$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=kae^{ax}$ و $f'(x)=af(x)+b$.

و عليه حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

ملاحظة

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات a و b ثابتة.

تمرين تدريبي

أوجد الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $(E)\ldots y+y'=1$ بحيث $f(0)=2$

✓ الحل

المعادلة التفاضلية (E) تكتب على الشكل $y'=-y+1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال f_k المعرفة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=ke^{-x}+1$

$f_k(0)=2$ يكافئ $k+1=2$ يكافئ $k=1$

منه الدالة f المطلوبة معرفة كما يلي $f(x)=e^{-x}+1$



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 تبسيط عبارة

1) بسط العبارات التالية : $A=(\exp(x))^4$ ، $B=\dfrac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}$ ،

$C=\dfrac{\exp(2x)\times\exp(x)}{\exp(5x+1)}$

2) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون $\dfrac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=1-\dfrac{6}{\exp(x)+3}$

✓ الحل

1) $A=(\exp(x))^4=(\exp(x))^2\times(\exp(x))^2=\exp(2x)\times\exp(2x)=\exp(4x)$

$B=\dfrac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}=\dfrac{\exp(7x-3)}{(\exp(7x))^{-1}}=\exp(7x-3)\exp(7x)$

$=\exp(7x-3+7x)=\exp(14x-3)$

$C=\dfrac{\exp(2x)\exp(x)}{\exp(5x+1)}=\dfrac{\exp(3x)}{\exp(5x+1)}=\exp(3x)\times\exp(-5x-1)=\exp(-2x-1)$

2) $\dfrac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=\dfrac{\exp(x)+3-6}{\exp(x)+3}=1-\dfrac{6}{\exp(x)+3}$

تطبيق 2 تبسيط الأعداد

بسط الأعداد التالية $A=e^{-Ln(2)}+e^{Ln(3)}$ ، $B=\dfrac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}$ ، $C=\dfrac{e^{3x}}{(e^x)^3}$

✓ الحل

$A=\dfrac{1}{e^{Ln(2)}}+3=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$

$B=\dfrac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}=\dfrac{2}{e^{-1}\times e^{3Ln(2)}}=\dfrac{2}{e^{-1}\times(e^{Ln(2)})^3}=\dfrac{2}{e^{-1}\times 2^3}=\dfrac{e}{4}$

$C=\dfrac{e^{3x}}{(e^x)^3}=\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}}=e^{3x-3x}=e^0=1$

تطبيق 3 مركز تناظر لبيان دالة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1) بين ان $f(-x)+f(x)=2$ ماذا تستنتج ؟

2) تحقق من ان $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

✓ الحل

1) $f(-x)+f(x)=\dfrac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

$=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x+3e^x-1}{1+e^x}=\dfrac{2+2e^x}{1+e^x}=2$

منه نستنتج النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر لبيان f

2) $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{4e^x-(e^x+1)}{e^x+1}=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

تطبيق 4 كيفية التحقق من صحة مساواة

تحقق من صحة المساواة المعطاة من اجل كل x في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\dfrac{e^x}{2+e^x}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$ 2) $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ 4) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=1-\dfrac{3}{e^x+1}$

✓ الحل

1) $\dfrac{e^x}{2+e^x}=\dfrac{e^x}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1\right)}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$

2) $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

4) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-3}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1}{e^x+1}-\dfrac{3}{e^x+1}=1-\dfrac{3}{e^x+1}$

تطبيق 5 تعيين مجموعة حلول معادلة

- حل المعادلات التالية :

أ) $e^{3x}=1$ ، ب) $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ ، جـ) $2e^{-2x}=\frac{1}{e^{2x}-2}$

د) $(e^{-x}-5)(e^{2x}-e)=0$ ، هـ) $\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}=3$

✓ الحل

أ) $e^{3x}=1$ تكافئ $e^{3x}=e^{0}$ تكافئ $3x=0$ تكافئ $x=0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S=\{0\}$

ب) مجموع تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}-\{0\}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-\frac{1}{x}=x+2$

و هذه الأخيرة تكتب على الشكل $x^2+2x+1=0$ و حلها هو $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) المجموعة التي تكون فيها المعادلة (جـ) لها معنى هي $\mathbb{R}-\{0\}$

المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-2x}=\frac{1}{4}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-2x}=\frac{1}{4}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-2x=Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

وحلول هذه الأخيرة هي $x=-\frac{1}{2}Ln(4)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\left\{-\frac{1}{2}Ln(4)\right\}$

د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $]-\infty\ ,\ +\infty[$.

$(e^{-x}-5)(e^{2x}-e)=0$ تكافئ $e^{-x}-5=0$ أو $e^{2x}-e=0$

$e^{-x}-5=0$ تكافئ $e^{-x}=5$ ومنه $-x=Ln(5)$ أي $x=-Ln(5)$

$e^{2x}-e=0$ تكافئ $e^{2x}=e^{1}$ ومنه $2x=1$ أي $x=\frac{1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S=\left\{\frac{1}{2}\ ,\ -Ln(5)\right\}$

هـ) مجموعة تعريف المعادلة (هـ) هي $\mathbb{R}$.

المعادلة (هـ) تكتب على الشكل $e^{-x}=3+6e^{-x}$ و منه $e^{-x}=\frac{-3}{5}$

بما أن $\frac{-3}{5}<0$ و $e^{-x}>0$ فإن المعادلة $e^{-x}=\frac{-3}{5}$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (هـ) هي مجموعة خالية.

تطبيق 6 تعيين مجموعة حلول متراجحة

حل المتراجحات التالية :

أ) $e^{2x}\geq 1$ ، ب) $3e^{-x}-2\geq 0$ ، جـ) $(e^{x}+3)(2-e^{x})\geq 0$

د) $\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\geq 0$ ، هـ) $e^{-x^2-x}\leq 1$ ، و) $e^{x}-\frac{9}{e^{x}}<0$

✓ الحل

أ) مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $\mathbb{R}$.

المتراجحة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x}\geq e^{0}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $2x\geq 0$ أي $x\geq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S=[0\ ,\ +\infty[$

ب) مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $\mathbb{R}$.

المتراجحة (ب) تكتب على الشكل $e^{-x}\geq\frac{2}{3}$ أي $e^{-x}\geq e^{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ هي $\left]-\infty\ ,\ -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left]-\infty\ ,\ -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

جـ) مجموعة تعريف المتراجحة (جـ) هي $\mathbb{R}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{x}+3>0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي نفس حلول المتراجحة $2-e^{x}\geq 0$

$2-e^{x}\geq 0$ تعني $e^{x}\leq 2$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\leq 2$ هي $]-\infty\ ,\ Ln(2)]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=]-\infty\ ,\ Ln(2)]$

د) المتراجحة $\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\geq 0$ تكافئ $e^{x}-1\geq 0$ أي $e^{x}\geq 1$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\geq 1$ هي $[0\ ,\ +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=[0\ ,\ +\infty[$

هـ) مجموعة حلول المتراجحة $e^{-x^2-x} \leq 1$ هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$
و لكن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$ هي $]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$
إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$

و) المتراجحة (و) تكتب على الشكل $\frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x} < 0$

و بما أن $\frac{e^x+3}{e^x} > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي نفسها مجموعة حلول
المتراجحة $e^x-3 < 0$ و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty, Ln(3)[$
إذن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي $S=]-\infty, Ln(3)[$

تطبيق 7 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

1) عين جذور كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث $p(x)=x^2+4x-5$
2) استنتج حلول المعادلة (E) $e^{2x}+4e^x=5$
3) حل المتراجحة التالية (E') ... $e^{2x}+4e^x-5 \leq 0$

✓ الحل

1) $\Delta=16-4(1)(-5)=36$
بما أن $\Delta > 0$ فإن لـ $p(x)$ جذرين هما 1 و -5
2) بوضع $e^x=X$ المعادلة (E) تكتب $X^2+4X-5=0$
و من السؤال الأول نجد أن $X=1$ أو $X=-5$
$X=-5$ مرفوض لأن $X>0$.
$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$
و منه مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{0\}$
3) المتراجحة (E') تكتب على الشكل $(e^x-1)(e^x+5) \leq 0$
بما ان $e^x+5 > 0$ فإن مجموعة حلول (E') هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $e^x-1 \leq 0$
$e^x-1 \leq 0$ يكافئ $x \leq 0$
إذن مجموعة حلول المتراجحة (E') هي $S=]-\infty, 0]$

تطبيق 8 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

حل المعادلات و المتراجحات التالية :
أ) $\frac{e^{-x}+1}{e^x-1}=4$ ، ب) $e^{3x+1}+4e^{2x+3}-5e^{x+2}=0$

جـ) $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$ ، د) $\frac{e^{x+1}-1}{e^{2x+2}+1} \leq \frac{e^{x+1}-2}{e^{x+1}+2}$
هـ) $4e^{2x}-e^{-2x} \leq 3$

✓ الحل

أ) مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $\mathbb{R}-\{0\}$
المعادلة (أ) تكتب على الشكل $4e^{2x}-5e^x-1=0$... $(1)'$
بوضع $e^x=X$ المعادلة $(1)'$ تكتب على الشكل $4X^2-5X-1=0$
وحلا هذه الأخيرة هما $X_1=\frac{5+\sqrt{39}}{8}$ و $X_2=\frac{5-\sqrt{39}}{8}$
X_2 حل مرفوض لأنه سالب.
$X=X_1$ يكافئ $e^x=X_1$ ومنه $x=Ln(X_1)$
إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{Ln(X_1)\}$

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}$.
بضرب المعادلة (ب) في e^{-2} نجد (1) ... $e^{3x+2}+4e^{2x+1}-5e^x=0$
و بوضع $e^x=X$ تصبح المعادلة (1) كما يلي $e^2X^3+4eX^2-5X=0$$(1)'$
$e^2X^3+4eX^2-5X=0$ تكافئ $X(e^2X^2+4eX-5)=0$
يكافئ $(X=0)$ او $(e^2X^2+4eX-5=0)$
يكافئ $(X=0)$ او $\left(X=\frac{1}{e}\right)$ او $\left(X=\frac{-5}{e}\right)$
$X=\frac{-5}{e}$ مرفوض لأنه سالب و $X=0$ مرفوض لأنه معدوم.
$X=\frac{1}{e}$ يكافئ $e^x=\frac{1}{e}$ يكافئ $x=-1$
إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) بوضع $e^x=X$ المعادلة (جـ) تصبح كما يلي $X^3-(e^2-1)X^2-e^2X=0$
وهذه الأخيرة تكتب على الشكل $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ لأن $X>0$
حلا المعادلة $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ هما e^2 و -1
بما أن $X>0$ فإن -1 مرفوض.
$X=e^2$ يكافئ $e^x=e^2$ منه $x=2$
إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{2\}$

د) مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $\mathbb{R}$
بوضع $X=e^{x+1}$ المتراجحة (د) تكتب $\frac{X-1}{X^2+1} \leq \frac{X-2}{X+2}$

و بالتبسيط نجد $\frac{-X^2(X-3)}{(X^2+1)(X+2)} \leq 0$ (I)

وبما أن $\frac{X^2}{(X^2+1)(X+2)} > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (I) هي نفس مجموعة حلول المتراجحة $-(X-3) \leq 0$ أي $X \geq 3$

$X \geq 3$ يكافئ $e^{x+1} \geq 3$ يكافئ $x+1 \geq Ln3$ يكافئ $x \geq -1+Ln3$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = [-1+Ln3 \ , \ +\infty[$.

هـ) بضرب طرفي المتراجحة (هـ) في e^{2x} نجد $4e^{4x}-3e^{2x}-1 \leq 0$... (1)

و بوضع $e^{2x} = X$ تصبح المتراجحة (1) كما يلي $4X^2-3X-1 \leq 0$ (1)'

و مجموعة حلول المتراجحة (1)' هي $[0,1]$

$X \in [0,1]$ يكافئ $0 < e^x < 1$ يكافئ $x < 0$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S =]-\infty \ , \ 0[$

تطبيق 9 تعيين مجموعة حلول جملة معادلتين

- حل الجمل التالية :

1) $\begin{cases} 2e^x - e^y = e \\ e^x + 2e^y = 1 \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} e^x + e^y = e+1 \\ x+y=1 \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} xy=-2 \\ e^{4x} \times e^y = \frac{1}{e^2} \end{cases}$

✓ الحل

1) بوضع $X = e^x$ و $Y = e^y$ الجملة (1) تصبح كما يلي $\begin{cases} 2X - Y = e & \dots (1) \\ X + 2Y = 1 & \dots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 تصبح الجملة كما يلي

$\begin{cases} 4X - 2Y = 2e & \dots (1)' \\ X + 2Y = 1 & \dots (2)' \end{cases}$

بجمع طرفي المعادلتين (1)' و (2)' طرفا لطرف نجد $5X = 1+2e$ و منه $X = \frac{1+2e}{5}$

و بتعويض قيمة X في المعادلة (2)' نجد $Y = \frac{1-X}{2} = \frac{2-e}{5}$

$X = \frac{1+2e}{5}$ يكافئ $e^x = \frac{1+2e}{5}$ يكافئ $x = Ln\left(\frac{1+2e}{5}\right)$

$Y = \frac{2-e}{5} < 0$ و منه y غير موجود و بالتالي الجملة (1) ليس لها حلولا في $\mathbb{R}^2$

ب) لدينا $x+y=1$ منه $y=1-x$ و بتعويض عبارة y في المعادلة $e^x+e^y=e+1$

نجد $e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$ (*)

بوضع $X=e^x$ المعادلة (*) تكتب $X^2-(e+1)X+e=0$ وحلا هذه الأخيرة هما e و 1

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

$X=e$ يكافئ $e^x=e$ يكافئ $x=1$

لما $x=0$ نجد $y=1$ و لما $x=1$ نجد $y=0$

و منه مجموعة حلول الجملة (ب) هي $S=\{(0,1),(1,0)\}$

جـ) الجملة (جـ) تكتب على الشكل $\begin{cases} xy=-2 \\ e^{4x+y}=e^{-2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} xy=-2 \\ 4x+y=-2 \end{cases}$

من المساواة $xy=-2$ نجد $y=\frac{-2}{x}$ مع $x \neq 0$

نعوض عبارة y في المعادلة $4x+y=-2$ نجد $4x-\frac{2}{x}=-2$

بالتبسيط نجد $4x^2+2x-2=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{1}{2}$ و -1

لما $x=\frac{1}{2}$ نجد $y=-4$ و لما $x=-1$ نجد $y=2$.

إذن مجموعة حلول الجملة (جـ) هي $\left\{\left(\frac{1}{2},-4\right),(-1,2)\right\}$

تطبيق 10 حساب نهايات دالة

عين نهاية الدالة f عند العدد المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{e^x-1}{3x}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) $f(x)=5xe^{-x}$ عند $-\infty$

جـ) $f(x)=\frac{2e^x-2}{2x-2}$ عند $+\infty$ و $(-\infty)$

د) $f(x)=e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

هـ) $f(x)=2x-1+e^{-x}$ عند $(-\infty)$

✓ الحل

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \times \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{3}$ لأن $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)\times\frac{1-\frac{1}{e^x}}{3} = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{3}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x-1)\times\frac{1}{3x} = 0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5xe^{-x} = -\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-2}{2x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\left[\frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}}\right] = +\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}}=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x-2)\times\frac{1}{2x-2} = 0$ -

لأن $\lim_{x\to-\infty}(2e^x-2)=-2$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x-2}=0$

د) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-e^{-x}+e^{-2x}\right) = +\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right) = 1$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}} = 0$

هـ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left[2-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right] = +\infty$

تطبيق 11 حساب العدد المشتق

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x^2-3x)e^x$ ب) $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$

ج) $f(x)=\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$ د) $f(x)=\frac{e^x-1}{x+1}$ هـ) $f(x)=e^x\cos x$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ هما

$x\mapsto e^x$ و $x\mapsto(x^2-3x)$ ولدينا $f'(x) = 2xe^x+e^x(x^2-3x) = e^x(x^2-x)$

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

ج) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$

ولدينا $f'(x) = e^x\times\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}(e^x-1 = \frac{e^x-e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^2}$

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

ولدينا $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-(e^x-1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$

هـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما

$x\mapsto e^x$ و $x\mapsto\cos x$ ولدينا $f'(x) = e^x\cos x-e^x\sin x = e^x(\cos x-\sin x)$

تطبيق 12 دراسة استمرارية و قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & , x\le 1 \\ f(x)=2-x & , x>1 \end{cases}$

1) عين مجموعة التعريف الدالة f

2) ادرس استمرار f عند $x=1$

3) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=1$

✓ الحل

1) الدالة $x\mapsto 2e^{x-1}-1$ معرفة على $\mathbb{R}$ بالتالي فهي معرفة على $]-\infty\ ,\ 1]$

و الدالة $x\mapsto 2-x$ معرفة على $\mathbb{R}$ فهي معرفة على $]1\ ,\ +\infty[$.

إذن الدالة f معرفة على $]-\infty\ ,\ 1]\cup]1\ ,\ +\infty[$ اي معرفة على $\mathbb{R}$.

2) f مستمرة عند 1 يعني أن $1\in D_f$ و $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(2-x) = 1 = f(1)$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(2e^{x-1}-1) = 1 = f(1)$

اذن $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ و عليه فإن f مستمرة عند العدد 1.

3) f قابلة للاشتقاق عند 1 يعني أن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2e^{x-1}-1-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}2\,\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{X\to 0}2\,\frac{e^{X}-1}{X}=2=\ell_1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1}=-1=\ell_2$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند 1

تطبيق 13 المستقيم المقارب المائل. التمثيل البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=-x-1+\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ ، و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) أ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x-1$ مقارب لـ (γ) مائل بجوار $-\infty$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $+\infty$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}4\,\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{1+e^{-x}}=4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$

2) أ) (d) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-x-1)=0$

بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{1+e^x}=0$ فإن (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

ب) (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ يعني $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=0$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-4+\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{1+e^x}=0$

فإن (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

جـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-\dfrac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-1=0$

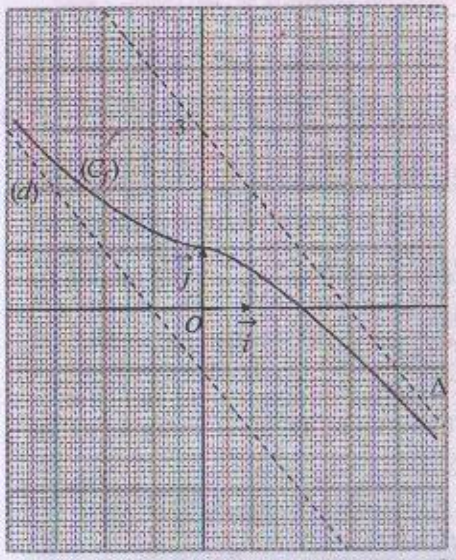
يكافئ $x=0$.

من أجل كل $x\neq 0$

يكون $f'(x)<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	$-$
تغيرات f	$+\infty$	↘	$-\infty$



$f'(x)$ ينعدم عند $x=0$

و لا يغير إشارته

و منه النقطة $A(0,1)$

هي نقطة إنعطاف لـ (C_f)

تطبيق 14 تعيين عبارة دالة ثم رسم تمثيلها البياني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x+ax+b$ ، (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس حيث a و b حقيقيان.

1) عين a و b بحيث المنحنى (γ) يمر من النقطة $o(0,0)$ و معامل توجيه المماس لـ (γ) عند النقطة o هو -2

2) من أجل الدالة المحصل عليها سابقا.

أ) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

جـ) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين إحداهما 0 و الآخر α حيث $1<\alpha<2$

د) عين اشارة $f(x)$ حسب قيم x .

هـ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-4x-2$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

ثم ادرس وضعية (d) بالنسبة إلى (γ) ثم ارسم (γ) و (d)

✓ الحل

1) - (γ) يمر من النقطة $o(0,0)$ يعني أن $f(0)=0$

$f(0)=0$ تكافئ $2+b=0$ تكافئ $b=-2$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2e^x+a$

$f'(0)=-2$ تعني $2+a=-2$ و منه $a=-4$

إذن الدالة المطلوبة هي $f(x)=2e^x-4x-2$

2) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-4x-2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^x}{x}-2-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

ب) من السؤال (1) لدينا $f'(x)=2e^x-4$

$f'(x)=0$ يكافئ $e^x=2$ يكافئ $x=Ln(2)$

لما $x>Ln2$ فإن $2e^x-4>0$ و منه f متزايدة تماما على $]Ln2\ ,\ +\infty[$

لما $x<Ln2$ فإن $2e^x-4<0$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty\ ,\ Ln2[$

x	$-\infty$	0	$Ln(2)$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	0	+	+
تغيرات f	$+\infty$ ↘		$f(Ln(2))$ ↗		$+\infty$

$f(Ln2)\approx -0,76$

جـ) بما أن $f(0)=0$ فإن 0 حلا للمعادلة $f(x)=0$

- بما أن من أجل كل x من $]-\infty, Ln(2)[$ لدينا $f'(x)<0$

و $]Ln2\ ,+\infty[$ $2-4Ln2<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من $]Ln2\ ,+\infty[$

و بما أن $f(1)<0$ و $f(2)>0$ فإن $1<\alpha<2$

د) - إذا كان $x\in]-\infty\ ,\ 0[\cup]\alpha\ ,+\infty[$ فإن $f(x)>0$

- إذا كان $x\in]0\ ,\ \alpha[$ فإن $f(x)<0$

هـ) (d) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x=0$

فإن (d) مستقيم مقارب لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

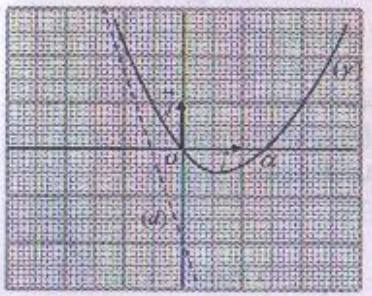
نعين إشارة المقدار $f(x)-(-4x-2)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(-4x-2)=2e^x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $2e^x>0$

و منه $f(x)-(-4x-2)>0$

أي أن المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (d)



تطبيق 15 تعيين التمثيل البياني لدوال انطلاقا من بيان معطى

ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني (C_f) الممثل للدالة $x\longmapsto e^x$

ثم استنتج التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية انطلاقا من (γ)

$g(x)=e^x-3$ ، $L(x)=|3-e^x|$ ، $K(x)=2-e^x$

✓ الحل

أ) بما أن $g(x)=e^x-3=f(x)-3$ فإن بيان الدالة g هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-3\vec{j}$

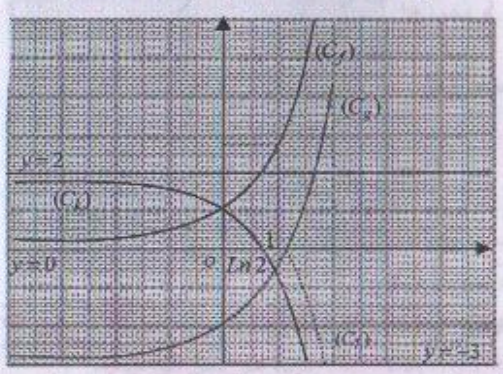
(C_f) له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

و (C_g) له مستقيم مقارب معادلته $y=-3$ بجوار $-\infty$.

ب) $\begin{cases} L(x)=3-e^x & ,\ x\le Ln3 \\ L(x)=e^x-3 & ,\ x\ge Ln3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} L(x)=-g(x) & ,\ x\le Ln3 \\ L(x)=g(x) & ,\ x\ge Ln3 \end{cases}$

- على المجال $[Ln3\ ,+\infty[$ بيان الدالة L منطبق على (C_g)

- على المجال $]-\infty, Ln3[$ بيان الدالة L هو نظير (C_g) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=0$



جـ) $K(x)=2-e^x=2-f(x)$

و منه $\frac{K(x)+f(x)}{2}=1$

أي أن بيان الدالة K هو نظير (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=1$

- (C_K) يقطع $(x'x)$ في النقطة ذات الفاصلة $Ln2$

و (C_L) يقطع $(x'x)$ في النقطة ذات الفاصلة $Ln3$

تطبيق 16 دراسة تغيرات دالة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=e^x+\frac{1-x}{1+x}$ و (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجالين $]-\infty\ ,-1[$ ، $]-1\ ,+\infty[$

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{1+x}=-1$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-1} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1-x}{1+x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-1} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1-x}{1+x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و لدينا $f'(x)=-e^{-x}-\frac{2}{(1+x)^2}$

من أجل كل x من D_f يكون $f'(x)<0$

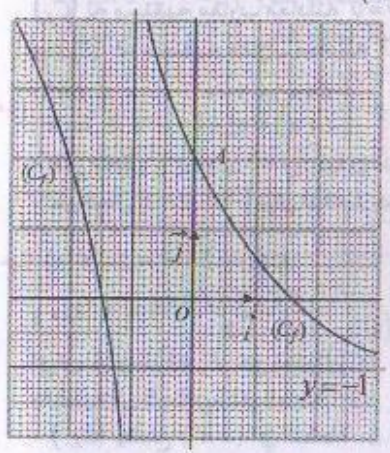
و منه f متناقصة تماما على كل

من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
تغيرات f	$+\infty$	↘	‖	↘	-1

$y=-1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(+\infty)$

(γ) يقطع (yy') في النقطة $A(0,2)$



تطبيق 17 رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

f معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني.

2) m عدد حقيقي.

أ) بين أن المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^x-1=0$

جـ) استنتج أن $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x)>0$ لأن $e^{-x}>0$ و $e^x>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- (γ) يقطع (yy') في $O(0,0)$

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ) بما أن $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $m\in]-\infty,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

ب) $f(x)=m$ يكافئ $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=m$ يكافئ $e^{2x}-2me^x-1=0$

جـ) بوضع $e^x=X$ المعادلة $e^{2x}-2me^x-1=0$ تصبح $X^2-2mX-1=0$... (1) و مميزها هو $\Delta=4m^2+4$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة (1) لها حلين هما

$X_1 = m+\sqrt{m^2+1}$

$X_2 = m-\sqrt{m^2+1}$

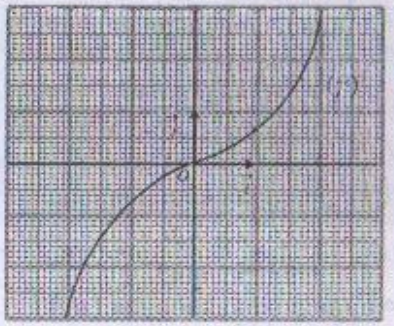
بما أن $m^2+1>m^2$ فإن $X_2<0$

و بالتالي فهو مرفوض.

إذن المعادلة (1) لها حل وحيد $X_1=m+\sqrt{m^2+1}$.

$X=X_1$ يكافئ $x=Ln(X_1)$ يكافئ $x=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$

بما أن x هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{2x}-2me^x-1=0$ فإنه هو الحل الوحيد لـ $f(x)=m$ إذن $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{1+m^2}\right)$



تطبيق 18 رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) 1) تحقق انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)$ يكتب على الشكل
$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$ و $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$
ب) ادرس نهايات f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
جـ) بين أن المستقيمين (d_1) و (d_2) حيث $y=x+1$ ، (d_1) و $y=x-1$ ، (d_2) مقاربان لـ (γ) عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$ على التوالي
د) عين الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d_1) و (d_2)
2) 1) بين أن الدالة f فردية.
ب) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$
3) أرسم (d_1) ، (d_2) و (γ) والمماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$
4) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α محددا حصرا له بتقريب $0,1$

✓ الحل

1) 1) $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{e^x+1}$

$x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1-e^x}{1+e^x}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$

جـ) (d_1) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x+1}=0$ فإن (d_1) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

(d_2) مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ فإن (d_2) مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

د) بما أن $f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}<0$ فإن المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (d_1)

بما أن $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}>0$ فإن المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (d_2)

2) 1) f فردية يعني انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$
فإن $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$.

$f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=-x-\frac{1-e^x}{1+e^x}=-x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

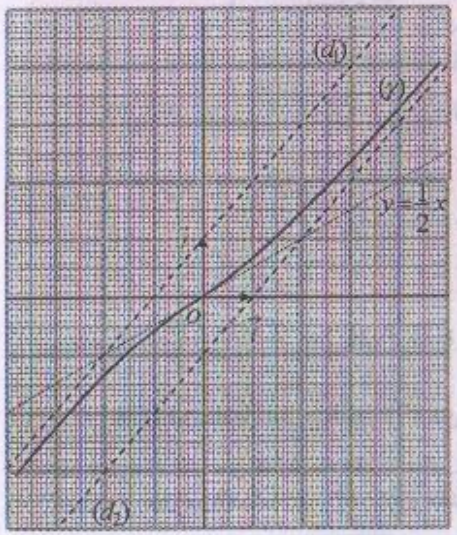
إذن f دالة فردية.

ب) بما أن f فردية فإننا نقتصر دراستها على المجموعة $D_f\cap\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$
و لدينا $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0$

x	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	
تغيرات f	0 ⟶	$+\infty$

و منه f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

3) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $y=\frac{1}{2}x$



بما أن f فردية نرسم بيانها على المجال $[0,+\infty[$ و نتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المركز o.

4) بما أن $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $1\in\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=1$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$

$f(1)-1=-\frac{e-1}{e+1}<0$

$f(2)-1=1-\frac{e^2-1}{e^2+1}>0$

$(f(1)-1)\times(f(2)-1)<0$

ومنه α تنتمي إلى المجال $]1,2[$

نستعمل طريقة المسح بخطوة قدرها $P=0,1$ فنحصل على الجدول المجاور

x	y
1	$-\frac{e-1}{e+1}$
$1,1$	$0,6$

و منه $1,0<\alpha<1,1$

تطبيق 19 دراسة قابلية اشتقاق دالة و رسم التمثيل البياني

f معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ من أجل $x>0$
و $f(0)=0$ ، (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.
1) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)
2) من أجل كل $x>0$ نضع $t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$
ادرس نهاية $t(x)$ عند الصفر. ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر

3) 1) بين انه من اجل كل x 0 يكون $f'(x)=\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

ب) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم (d) و (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$

إذن فالمستقيم (d) ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)

2) $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ وبوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد

$$\lim_{x\to0} t(x)=\lim_{X\to+\infty}-\left(-Xe^{-X}\right)+4\left(-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}\right)^2-27\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)^3=0$$

لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}\right)=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)=0$

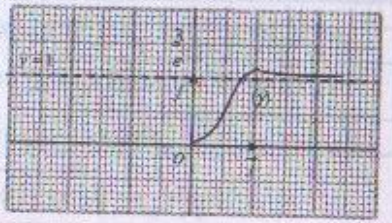
بما ان $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر والعدد المشتق هو $f'(0)=0$

3) 1) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل x 0 لدينا $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-x)}{x^4}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$ و متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f	0	↗	$\frac{e}{3}$	↘	1



تطبيق 20 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) I) عين نهاية f على اطراف المجال $]0,+\infty[$.

2) 1) تحقق انه من اجل كل x 0 يكون $f(x)-x-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$

ب) استنتج نهاية $f(x)-x-1$ عند $(+\infty)$ و بين ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ). (تقبل ان من اجل x 0 يكون (d) تحت (γ))

3) ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ مشكلا جدول تغيراتها

II) 1) عين نهايات الدالة f على اطراف المجال $]-\infty,0[$

2) بين ان المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

(تقبل ان من اجل كل x 0 فإن (d) يقع فوق (γ))

3) g دالة معرفة على $]-\infty,0[$ بـ $\begin{cases} g(x)=f(x) & ,\ x<0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) حدد نهاية $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ لما x يؤول إلى 0.

ب) استنتج ان g قابلة للاشتقاق عند الصفر.

ج) ادرس تغيرات g على $]-\infty,0[$ مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم (γ).

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ (مع $X=\frac{1}{x}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

2) $f(x)-x-1=xe^{\frac{1}{x}}-x-1=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$

ب) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^X-1}{X}-1\right]=0$ مع $\left(X=\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\right]$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن اجل x 0 لدينا $f'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

- إذا كان x 1 فإن $f'(x)$ 0

ومنه f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.

- إذا كان x 1 فإن $f'(x)$ 0 منه f متناقصة تماما على $]0,1[$.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	-	0	+	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

II) 1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-x-1)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{\frac{1}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\frac{e^X-1}{X}-1\right]=0$ مع $X=\frac{1}{x}$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

3) أ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=0$

ب) بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

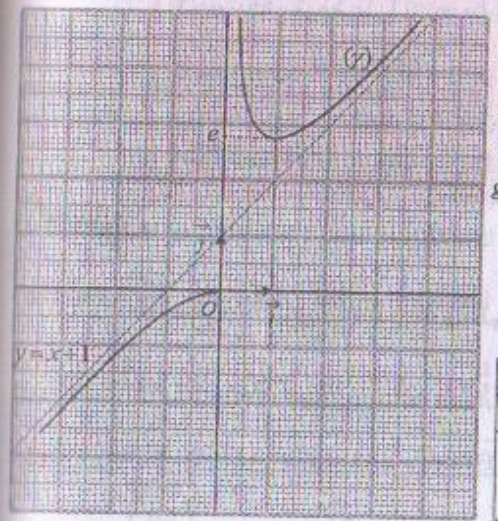
فإن g قابلة للاشتقاق عند الصفر.

ج) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$

ومن أجل كل $x<0$ لدينا $g'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

من أجل $x<0$ لدينا $g'(x)<0$

ومنه g متزايدة تماما على المجال: $]-\infty,0[$.



x	$-\infty$	0
إشارة $g'(x)$	+	
تغيرات g		0 / $-\infty$

تطبيق 21 التمثيل البياني لدالة وحل معادلات

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^x+x+1$

1) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ يطلب إيجاد حصرا له

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{x e^x}{e^x+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) بين أن $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات f على $\mathbb{R}$.

2) بين أن $f(\alpha)=\alpha+1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) عين معادلة للماس (d) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة صفر ثم أدرس الوضع النسبي لـ (d) و (γ)

4) عين نهاية f عند $(-\infty)$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

5) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

6) أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (d) و (Δ) و (γ).

✓ الحل

I- 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $g'(x)=e^x+1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)>0$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
اشارة $g'(x)$	+	
تغيرات g	$-\infty$	$+\infty$

2) بما أن $g'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$

فإن للمعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

بما أن $f(-1)=\frac{1}{e}>0$ و $f(-2)=\frac{1}{e^2}-1<0$ فإن $-2<\alpha<-1$

3) إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)>0$

II- 1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f'(x)=\frac{(e^x+x e^x)(1+e^x)-e^x x e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\left[(1+x)(1+e^x)-x e^x\right]}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$

و عليه إذا كان $x<\alpha$ فإن $f'(x)<0$ و إذا كان $x>\alpha$ فإن $f'(x)>0$

و إذا كان $x=\alpha$ فإن $f'(\alpha)=0$

2) $g(\alpha)=0$ يكافئ $e^\alpha+\alpha+1=0$ يكافئ $e^\alpha=-\alpha-1$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{1+e^\alpha}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha}=\alpha+1$$

بإضافة 1 إلى أطراف المتباينة $-2<\alpha<-1$ نجد $-1<1+\alpha<0$ إذن $-1<f(\alpha)<0$

3) معادلة المماس لـ (γ) عند الصفر هي $(d): y=\frac{1}{2}x$

- دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}x=\frac{x e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x e^x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}x e^x-\frac{1}{2}x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}x\left(e^x-1\right)}{1+e^x}$$

إشارة $\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ من إشارة المقدار $\frac{1}{2}x(e^x-1)$

من الجدول المجاور نستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)-\frac{1}{2}x\geq 0$

أي المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (d) و يمسه في النقطة $o(0,0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{2}x$	-	0	+
e^x-1	-	0	+
$f(x)-\frac{1}{2}x$	+	0	+

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1$

المنحنى (γ) له مستقيم مقارب افقي معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x e^x-x-x e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=0$

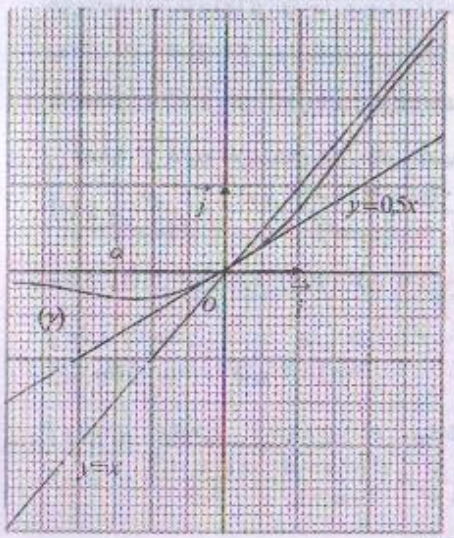
إذن فالمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$

6) $f(x)-x=\frac{x e^x}{1+e^x}-x=\frac{x e^x-x-x e^x}{1+e^x}=\frac{-x}{1+e^x}$

- إذا كان $x>0$ فإن $f(x)-x<0$ ومنه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ).

- إذا كان $x<0$ فإن $f(x)-x>0$ ومنه (γ) يقع فوق المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) يقطع (γ) في النقطة $o(0,0)$.



x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

تطبيق 22 الدوال و المحل الهندسي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر المنحنيين (γ_1) و (γ_2) الممثلين للدالتين $x\to e^x$ و $x\to e^{-x}$.

نرفق بكل عدد حقيقي m النقطة $A(m,o)$ و لتكن النقطتين M و N من المنحنيين (γ_1) و (γ_2) على الترتيب فاصلتهما m.

1) ارسم (γ_1) و (γ_2) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) (T_1) و (T_2) مماسان لـ (γ_1) و (γ_2) في النقطتين M و N على التوالي.
أوجد معادلة كل من (T_1) و (T_2) ثم بين أن (T_1) و (T_2) متعامدان.

3) المستقيمان (T_1) و (T_2) يتقاطعان في النقطة p. بين أن إحداثيتي p هي $x=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$ و $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

4) لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$
أ) أوجد بدلالة m إحداثيي النقطة I.
ب) أوجد المحل الهندسي للنقطة I لما m يمسح $\mathbb{R}$.
جـ) أرسم مجموعة النقط I في نفس المعلم السابق.

✓ الحل

1) (γ_2) هو نظير (γ_1) بالنسبة إلى محور التراتيب

2) $(T_1): y=e^m(x-m)+e^m$

$(T_2): y=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$

ميل (T_2) × ميل $(T_1)=\left(-e^{-m}\right)\times e^m=-1$

و منه (T_1) و (T_2) متعامدان

3) لدينا $e^m(x-m)+e^m=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$ و

منه $\left(e^m+e^{-m}\right)x=m e^m-e^m+m e^{-m}+e^{-m}$

إذن $x=\frac{m e^m-e^m+m e^{-m}+e^{-m}}{e^m+e^{-m}}=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$

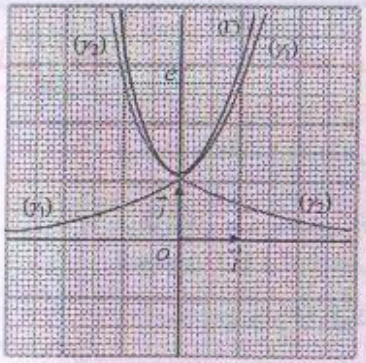
بالتعويض x في عبارة y نجد $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

4) 1) $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m$ و $y_I = \frac{e^m + e^{-m}}{2}$

إذن $I\left(m\ ,\ \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right)$

بوضع $m = x$ نجد $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

h	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $h'(x)$		$-$ 0 $+$	
تغيرات h	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



إذن المحل الهندسي للنقطة I هي المنحني الممثل للدالة $x \xrightarrow{h} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

تطبيق 23 المشتقات المتتابعة والمتتاليات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

$f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ ، ... هي مشتقات متتالية لـ f حيث $n \geq 1$.

1) عين $f^{(2)}$ و $f^{(3)}$

2) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، التمثيل البياني لـ $f^{(n)}$ يقبل مماسا افقيا في النقطة M_n .

أ) عين x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n و تحقق أن M_n تنتمي إلى المنحني (γ) ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية ، ما هي نهايتها ؟

جـ) بين أن المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = e^{2x}(-2+2-4x) = e^{2x}(-4x) = 2(-2x)e^{2x}$

$f^{(2)}(x) = \left(f^{(1)}\right)' = 2e^{2x}(-4x) - 4e^{2x} = e^{2x}(-4-8x) = 2^2(-1-2x)e^{2x}$

$f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}\right)' = 2e^{2x}(-4-8x) + (-8)e^{2x} = e^x(-16-16x) = 2^3(-2-2x)e^{2x}$

2) نسمي P_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ "

P_1 صحيحة لأن $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x}$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم n

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[-2e^{2x} + 2e^{2x}(1-n-2x)\right]2^n = e^{2x}(-2+2-2n-4x) \times 2^n$

$= 2^{n+1}\ e^{2x}(-n-2x) = 2^{n+1}\ e^{2x}(1-(n+1)-2x)$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه P_n صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

3) 1) $f^{(n+1)}(x) = 0$ يكافئ $-n-2x = 0$ يكافئ $x = \frac{-n}{2}$

إذن $x_n = x = \frac{-n}{2}$

$y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(1-n+n)e^{-n} = 2^n \times e^{-n}$

إذن $x_n = \frac{-n}{2}$ و $y_n = 2^n \times e^{-n}$

بوضع $x_n = x$ و $y_n = y$ نجد $n = -2x$ و $y = 2^{-2x}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4^x}$

إذن M_n تنتمي إلى المنحني ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بما أن $x_{n+1} - x_n = -\frac{(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{-1}{2}$

فإن (x_n) متتالية حسابية اساسها $-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$

جـ) بما أن $y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n$ فإن (y_n) متتالية هندسية اساسها $r = \frac{2}{e}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

تطبيق 24 حساب نهاية متتالية باستعمال الدوال

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرف على $I = [0,1]$ الدالة f بـ

$$f(x) = -e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right]$$

1) احسب $f'(x)$ ثم بين انه من أجل كل x من I يكون $0 \leq f'(x) \leq 1$

2) استنتج ان $f(1) \geq f(0)$

3) باستعمال تغيرات g المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

بين ان $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$

4) استنتج أن $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq e$

5) بين ان $0 \leq e - V_n \leq \frac{3}{n!}$ حيث $V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

6) عين نهاية المتتالية (V_n).
7) عين n_0 بحيث من اجل $n \geq n_0$ يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$
استعمل للتباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

✓ الحل

1) $f'(x) = e^{-x}\left[\frac{x^n}{n!}\right] + \left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](-e^{-x}) = e^{-x}\left[\frac{x^n}{n!}\right] + \left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{x!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right](-e^{-x})$

$1 \geq e^{-x} \geq \frac{1}{e}$ (1) ، $1 \geq x^4 \geq 0$... (2)

بالضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد $1 \geq e^{-x}x^n \geq 0$

$1 \geq \frac{1}{n!} > 0$... (3) ، $1 \geq e^{-x}x^n \geq 0$ (4)

بالضرب حدود المتباينتين (3) و (4) طرفا لطرف نجد $1 \geq \frac{e^{-x}x^n}{n!} \geq 0$ اي $1 \geq f'(x) \geq 0$

2) بما ان $f'(x)$ موجب على I فإن f متزايدة تماما على I و عليه $f(1) > f(0)$

3) لدينا $g'(x) = \frac{1}{n!}\left(e^{-x}x^n - 1\right)$

بما أن $0 \leq e^{-x}x^n \leq 1$ فإن $0 \leq e^{-x}x^n - 1 \leq -1$ و بالتالي $g'(x) < 0$

إذن g متناقصة تماما على I و عليه $g(1) < g(0)$.

$g(1) < g(0)$ تعني $f(1) - \frac{1}{n!} \leq f(0)$ اي $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$.

4) $-1 \leq -e^{-1}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) \leq -1+\frac{1}{n!}$ و منه نجد $f(0) \leq f(1) \leq f(0)+\frac{1}{n!}$

بضرب حدود هذه المتباينة في $-e$ نجد $e \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} \geq e\left(1-\frac{1}{n!}\right)$

5) $V_n = 1+\frac{1}{n!}+...+\frac{1}{n!}$

بما أن $V_n \leq e$ فإن $e - V_n \geq 0$.

لدينا من السؤال الرابع المتباينة $V_n \geq e\left(1-\frac{1}{n!}\right)$ بضرب طرفيها في -1 نجد :

$\left(-1+\frac{1}{n!}\right)e \leq -V_n$ و بإضافة e إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $\frac{3}{n!} \leq \frac{e}{n!} \leq e - V_n$

إذن $\frac{3}{n!} \geq e - V_n \geq 0$

6) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n!} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}(e - V_n) = 0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = e$

7) حتى يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$ يجب أن يكون $\frac{3}{n!} \leq 10^{-4}$

بما ان $\frac{3}{n!} \leq \frac{3}{2^{n-1}}$ فإن $\frac{3}{2^{n-1}} \leq 10^{-4}$ حيث $2^{n-1} \geq 3\times10^{+4}$

ومنه ينتج $(n-1)Ln\,2 \geq Ln\left(3\times10^4\right)$

إذن $n \geq \frac{Ln\left(3\times10^4\right)}{Ln\,2}+1$ اي $n \geq 15,80$

و بالتالي قيمة n_0 هي $n_0 = 16$.

تطبيق 25 حل معادلات تفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية (E) ... $y' = y(1-y)$. نريد ايجاد حلول (E) التي لا تنعدم على $\mathbb{R}$ لذلك نضع $z = \frac{1}{y}$

1) تحقق ان $z' = -z+1$ (E')

2) بين ان حلول (E') هي الدوال $x \xrightarrow{f} 1+ce^{-x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3) استنتج حلول المعادلة (E) .

✓ الحل

1) $z' = \frac{-y'}{y} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = \frac{y-1}{y} = 1-\frac{1}{y} = 1-z$

2) f حلا للمعادلة (E') يعني ان $f'(x) = -f(x)+1$.

$f'(x) = -ce^{-x}+1-1 = -\left(1+ce^{-x}\right)+1 = -f(x)+1$

إذن $x \to 1+ce^{-x}$ حلا للمعادلة (E').

3) $z = \frac{1}{y}$ منه $y = \frac{1}{z}$ إذن $y = \frac{1}{1+ce^{-x}}$

تطبيق 26 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'+ay = f(x)$

لتكن (E) معادلة تفاضلية بحيث $y'+4y = 3xe^{2x}$ و لتكن (E') معادلة تفاضلية $y'+4y = 0$.

1) حل المعادلة (E')

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (ax+b)e^{2x}$ حلا خاص للمعادلة (E) .

✓ الحل

1) $y'+4y=0$ يكافئ $y'=-4y$ و حلها العام هو $y=\lambda e^{-4x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) g حلا للمعادلة (E) هذا معناه أن ... (1) $g'(x)+4g(x)=3xe^{2x}$

$g'(x) = ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax+a+2b)$

$g'(x)+4g(x) = e^{2x}(2ax+a+2b+4ax+4b) = e^{2x}(3ax+a+3b)$... (2)

من (1) و (2) نجد $a+6b=0$ و $6a=3$ و منه ينتج $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{12}$.

إذن $g(x) = \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}$.

تطبيق 27 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'+y=f(x)$

1) نريد حل المعادلة التفاضلية (E) ... $y'+y=x+1$ حيث y دالة عددية ذات المتغير x و y' مشتقتها

أ) نضع $z=y-x$ أكتب المعادلة التفاضلية (E) بدلالة z و لتكن (F).

ب) حل المعادلة (F) ثم (E).

2) نسمي f_α حل للمعادلة (E) بحيث $f_\alpha(0)=\alpha$ و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α حيث α عدد حقيقي معطى.

أ) ادرس تغيرات f_α في كل حالة من الحالات $\alpha=0$ ، $\alpha>0$ ، $\alpha<0$.

ب) بين انه من اجل كل α ، المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1 يمر من النقطة $o(0,0)$.

ج) بين ان كل المماسات للمنحنيات (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة يطلب تعيينها مع $\alpha \neq 0$.

✓ الحل

1) أ) $z=y-1$ و منه $y'=z'+1$

إذن (E) تكتب $z'+1+z+x=x+1$ أي $z'+z=0$ و منه $(F): z'+z=0$

ب) الحل العام للمعادلة (F) هو $z=\lambda e^{-x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو $y=\lambda e^{-x}+x$

2) $f_\alpha(0)=\alpha$ يكافئ $\lambda e^0+0=\alpha$ أي $\lambda=\alpha$

إذن $f_\alpha(x)=\alpha e^{-x}+x$

1) أ) $f'_\alpha(x)=-\alpha e^{-x}+1=\frac{-\alpha}{e^x}+1=\frac{-\alpha+e^x}{e^x}$

- في حالة $\alpha<0$ لدينا $f'_\alpha(x)=0$ يكافئ $\alpha=e^x$ يكافئ $x=Ln(\alpha)$

إذا كان $x<Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x)>0$ واذا كان $x>Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x)<0$

- في حالة $\alpha>0$ يكون $f'_\alpha(x)>0$ منه f_α متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$		$+$	
تغيرات f_α	$-\infty$	↗	$+\infty$

حالة $\alpha<0$

x	$-\infty$	$Ln\,\alpha$	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات f_α	$+\infty$	↘ $1+Ln\,\alpha$ ↗	$+\infty$

حالة $\alpha>0$

في حالة $\alpha=0$ يكون $f'_\alpha(x)=1$ و منه $f_\alpha(x)=x$

(γ_0) في هذه الحالة هو مستقيم معادلته $y=x$

ب) المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو $y=(-\alpha e+1)x$

ومنه هذا المماس يمر من المبدا $o(0,0)$.

ج) المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معادلتها هي

$y=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0$

المماسات تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة هذا معناه المعادلة

(*) ... $x=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0$ لها حل وحيد.

من (*) نجد $x=x_0+1$ و منه $y=x=x_0+1$

إذن كل المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة $M_0(x_0+1\ ,\ x_0+1)$ مستقلة عن α.

تطبيق 28 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y''+\omega y=0$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) ... $f''+4f=0$

1) بوضع $g=f'$ بين أن g حلا للمعادلة (E') ... $g'+4g=0$ ثم حل (E').

2) استنتج أن حلول (E) هي الدوال $x \longrightarrow \frac{a}{4}e^{-4x}+b$ مع a و b عددان حقيقيان كيفيان.

3) من بين الحلول f عين الحل الذي يحقق $f(0)=0$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right)=2$

✓ الحل

1) بما أن $g=f'$ فإن $g'=f''$ و بتعويض f' و f'' في (E) نجد $g'+4g=0$
أي g حلا لـ (E').
الحل العام للمعادلة (E') هو $g(x)=ae^{-4x}$ حيث a عدد حقيقي.

2) حتى تكون f حلا للمعادلة (E) يجب أن يكون $f'(x)=g(x)$

$$f'(x)=(-4)\left(-\frac{a}{4}\right)e^{-4x}=ae^{-4x}=g(x)$$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة بـ $f(x)=-\frac{a}{4}e^{-4x}+b$

3) $f(0)=0$ يكافئ $-\frac{a}{4}+b=0$ ومنه $b=\frac{a}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=2$ يكافئ $-\frac{a}{4}e+b=2$(1)

بتعويض قيمة b في (1) نجد $-\frac{a}{4}e+\frac{a}{4}=2$ اي $\frac{-a}{4}(e-1)=2$

و منه $a=\frac{8}{-(e-1)}$ و $b=\frac{2}{1-e}$ إذن الدالة المطلوبة هي $x\mapsto\frac{-2}{1-e}e^{-4x}+\frac{2}{1-e}$

تطبيق 29 التناقص الأسي لتركيز الدواء في الدم

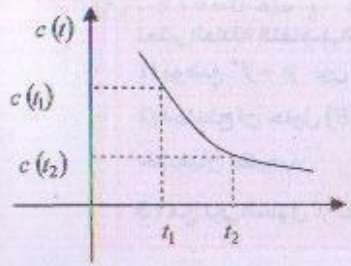
ليكن $C(t)$ التركيز بـ (mg/ℓ) لدواء في الدم بدلالة الزمن $t\ (0)$ حيث t معبر عنه بالساعات. سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة . ثابت التخلص يساوي $0,25$. التركيز الابتدائي هو $5\ mg/\ell$.

1) برر المساواة $C'(t)=-0,25C(t)$ ثم أوجد عبارة $C(t)$
2) ادرس تغيرات C و احسب نهاية $C(t)$ عند $(+\infty)$ ثم أرسم بيان الدالة C.
3) أعط حصرا بتقريب $0,01$ للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t)<2$

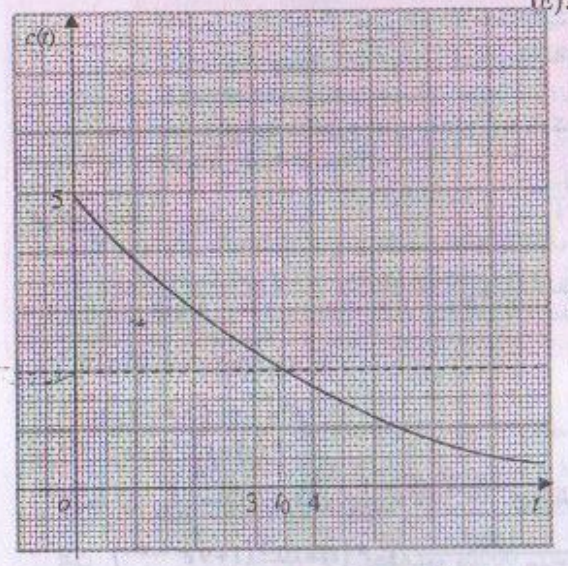
✓ الحل

1) $\lim\limits_{t_1\to t_2}\frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1}=V_E(t_2)$

$V_E(t_2)$ هي سرعة التخلص الدم من الدواء في اللحظة t_2.
سرعة التخلص V_E هي مشتقة التركيز $C(t)$
اي $C'(t)=V_E$



إن ثابت تخلص الجسم من الدواء هو معامل التناسب بين سرعة التخلص و التركيز في لحظة t
و بما أن التركيز يتناقص فإن المعامل يكون سالب اي $(-0,25)$
وعليه $C'(t)=-0,25C(t)$...(E)
و الحل العام للمعادلة (E) هو $C(t)=\alpha\times e^{-0,25t}$
حيث α عدد حقيقي.
لما $t=0$ فإن $C(0)=5$
ومنه $\alpha\times e^0=5$ اي $\alpha=5$
إذن $C(t)=5\ e^{-0,25t}$



2) بما أن $C'(t)=-1,25e^{-0,25t}$
فإن $C'(t)<0$ و بالتالي الدالة C متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.
و إليك جدول تغيرات C

t	0	$+\infty$
$C'(t)$	$-$	
$C(t)$	5	0

3) نضع $g(t)=C(t)-2$ و من المتباينة $C(t)<2$ نجد $t\geq 3,66$.
بما أن $g'(t)<0$ و $]-2\ ,\ 3[\in 0$ فإن المعادلة $g(t)=0$ لها حل وحيد t_0 حيث $3,66<t_0$ باستعمال طريقة المسح بخطوة قدرها $0,01$
نحصل على الجدول التالي.
إذن $3,66<t_0<3,67$

t	$g(t)$
3,66	0,00258
3,67	-0,0024

تطبيق 30 استعمال التناقص الأسي في دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق، يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا والقدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا.
لتكن $N(t)$ عدد البكتيريا في اللحظة t (معبر عنها بالساعات).
الملاحظات المستخلصة قادتنا الى نمذجة هذه الحالة بمعادلة تفاضلية
$N'(t)=0,07N(t)(1-10^{-3}N(t))$

نضع $P(t)=\frac{1}{N(t)}$ مع $N(t)\neq 0$

1) بين أن الدالة P تحقق المعادلة التفاضلية $P'=-0,07P+7\times10^{-5}$

2) استنتج عبارة $P(t)$ ثم $N(t)$ بدلالة t.

3) ما هو عدد البكتريا بعد 40 ساعة ؟

4) ما هوالوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتريا يمثل 80 % من الاستيعابية العظمى لهذا الوسط ؟

✓ الحل

1) $P'=\frac{-N'(t)}{N^2(t)}=\frac{-0,07N(t)\left(1-10^{-3}\times N(t)\right)}{N^2(t)}=\frac{-0,07\left(1-10^{-3}N(t)\right)}{N(t)}$

$P'=-\frac{0,07}{N(t)}+0,07\times10^{-3}$

$P'=-0,07P+7\times10^{-5}$

2) $P(t)=10^{-3}+ce^{-0,07t}$

و بما ان $P(0)=\frac{1}{100}$ فإن $10^{-3}+c=\frac{1}{100}$ وبالتالي $c=9\times10^{-3}$

إذن $P(t)=10^{-3}\left(1+9e^{-0,07t}\right)$ و $N(t)=\frac{1000}{1+9\times e^{-0,07t}}$

3) بما ان $N(40)=647$ فإن بعد 40 ساعة عدد البكتريا يصبح 647 .

4) 80 % من البكتريا يعادل 800 بكتيريا

$N(t)=800$ يكافئ $t=51,19$

إذن عدد الساعات هي تقريبا 51 ساعة.

تطبيق 31 تحول الآزوت بالهواء الجوي إلى الكربون المشع

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الآزوت و التي بفعل الإشعاعات الكونية تتحول إلى مادة الكربون المشع (C^{14}) ، و تحتوي الكائنات الحية على هذه المادة التي تتجدد على الدوام و عند موتها فإن مادة الكربون 14 تتحلل تدريجيا (تتناقص في الوسط).

لمعرفة زمن وفاة كائن نقوم بقياس نسبة الكربون 14 المتبقية في جسمه.

لتكن $N(t)$ عدد ذرات C^{14} المتواجدة في اللحظة t المعبر عنها بالأعوام في عينة من مادة عضوية.

بين الفيزيائيون أن الدالة N تحقق المعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ من اجل كل عدد حقيقي موجب t حيث $k=1,245\times10^{-4}$ و $N(0)=N_0$.

نقول أن سرعة تحلل C^{14} متناسبة مع عدد ذرات C^{14} المتواجدة في تلك اللحظة

1) اوجد $N(t)$ بدلالة N_0 و t

2) ما هي نسبة ذرات الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة ؟

3) نسمي نصف حياة الكربون C^{14} الزمن المطلوب لاستحالة نصف عدد ذرات C^{14}

أ) برر العلاقة $N(t+T)=\frac{1}{2}N(t)$ حيث T هو نصف حياة C^{14} .

ب) استنتج ان $T=\frac{Ln(2)}{k}$ معينا قيمة تقريبية له

4) قام علماء الآثار بتحليل شظايا لعظام وجدت في كهف ، فوجدوا نسبة الكربون C^{14} الموجودة في هذه العظام تمثل 20 % من نسبة الكربون C^{14} الموجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة.أوجد عمر شظايا العظام.

✓ الحل

1) الحل العام للمعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ هو $N(t)=\lambda e^{-kt}$

بما ان $N(0)=N_0$ فإن $\lambda e^0=N_0$ ومنه $\lambda=N_0$ إذن $N=N_0e^{-kt}$

2) كمية الكربون في اللحظة $t=10000$ سنة هي $N_1=N_0e^{-k\times10000}$

نسبة الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة هي $\frac{N_1-N_0}{N_0}$.

$\frac{N_1-N_0}{N_0}=\frac{N_0e^{-k\times10000}-N_0}{N_0}=e^{-k\times10000}-1=-0,712$

إذن نسبة الكربون المفقودة خلال 10000 سنة هي 7,12 % .

3) أ) $N(t+T)=N_0e^{-k(t+T)}=N_0e^{-kt}\times e^{-kT}=N(t)\times e^{-kT}$

بما ان $N(T)=\frac{1}{2}N_0$ فإن $N_0e^{-kT}=\frac{1}{2}N_0$ اي $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

إذن (*) $N(t+T)=N(t)\times\frac{1}{2}$

ب) بوضع $t=0$ العلاقة (*) تصبح $N_0e^{-kT}=N_0\times\frac{1}{2}$ ومنه نستنتج ان $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

من المساواة $e^{-kT}=\frac{1}{2}$ نجد $T=\frac{Ln(2)}{k}$ بتعويض قيمة k نجد $T\approx5567,45$

اي تقريبا 5568 سنة .

4) لدينا $\frac{N(t)}{N_0}=20\%$ و منه $N(t)=N_0\times0,20$.

$N_0e^{-kt}=N_0\times0,2$ تكافئ $e^{-kt}=0,2$ يكافئ $-kt=Ln(0,2)$

و منه نجد $t=\frac{Ln(0,2)}{-k}$ و بالحساب نجد $t\approx12927$.

تمارين و مسائل

-1 حل المعادلات التالية :

1) $e^{x-3}=1$ ، 2) $e^{4x^2+6}=e^{14x}$ ، 3) $e^x-e^{-2x}=0$

4) $\left(e^{-2x}-e\right)\left(e^{6x}+5\right)=0$ ، 5) $Ln\left(e^x-4\right)=5$ ، 6) $\frac{e^{2x}+2e^x-4}{3e^x-2}=1$

7) $e^x-2e^{-\frac{x}{2}}-5=0$ ، 8) $e^{2x}=2e^{-x}$ ، 9) $e^{4x}-3e^{2x}+2=0$ ،

10) $e^{-x}+e^x+2=0$ ، 11) $e^{3x}-\left(e^2-1\right)e^{2x}=e^{x+3}$

-2

1) عين جذور كثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x)=2x^2+9x-5$ مستنتجا تحليلا له.

2) أدرس إشارة كل من $\left(e^x+5\right)$ و $\left(2e^x-1\right)$

3) باستعمال الأسئلة السابقة حل المتراجحة $2e^{2x}+9e^x-5\rangle 0$.

-3 حل المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $2-e^x\geq 0$ ، 2) $e^{2x^2-1}\geq 3$ ، 3) $\left(e^x\right)^2\leq 4$

4) $3e^{2x}+e^x-4\langle 0$ 5) $e^x-2e^{-x}\langle 0$ ، 6) $\left(e^x-1\right)e^x\geq 2\left(e^x-1\right)$

7) $\frac{e^x-4}{e^x+4}\leq\frac{e^x-3}{e^{2x}+3}$ ، 8) $e^{x+1}\rangle 2^x$ ، 9) $e^{|x-1|}\geq 1$ ، 10) $2^{2x}+2^{x+1}-3\rangle 0$

11) $4^x+2^{x+1}-3\leq 0$ ، 12) $2^{x+2}-10\times 2^{x+1}+12=0$ ، 13) $3^x+2\times 3^{-x-1}=7$

-4 حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية ،

1) $\begin{cases}x\,y=14\\ e^x e^y=e\end{cases}$ ، ب) $\begin{cases}e^{x+y}+e^{x\,y}=2e^4\\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{2}\end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases}e^x-\frac{1}{e}e^y=1\\ 2e^x+e^y=4+e\end{cases}$

-5 أحسب نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x+3+xe^x$ ، ب) $f(x)=x+2+\frac{5}{e^x+1}$ ، جـ) $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$

د) $f(x)=\frac{5x-2}{e^x+2}$ ، هـ) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ ، و) $f(x)=\frac{3x+1}{x}e^x$

-6 أدرس نهاية الدالة f في المكان المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{e^x-2}{3x}$ عند 0 ، ب) $f(x)=5x\,e^{-x}$ عند $+\infty$.

جـ) $f(x)=\frac{3e^x-3}{3x-3}$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ، د) $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=e^{2x}-e^x+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

و) $f(x)=\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ي) $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+3\sqrt{x}}$ عند 0 ، ف) $f(x)=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}$ عند 0.

-7 f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=20x-600-e^{-0,5x+1}$

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$.

2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=20x-600$ مقارب مائل لمنحني الدالة f و ليكن (γ)

3) أدرس الوضعية النسبية لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

-8 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1-2e^x$

أ- 1) أدرس نهاية f عند $(-\infty)$

ب) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (γ) الممثل f.

2) أدرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d).

3) بين أنه نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=e^x\left(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}-2\right)$

ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$.

-9 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ln\left(e^x+2\right)$ و (γ) منحناها البياني في معلم.

1) أدرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f(x)=x+Ln\left(1+2e^{-x}\right)$ ثم استنتج أن (γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) في جوار $(+\infty)$.
3) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) .

10- عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال المعطاة مع تعيين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

1) $f(x)=x^3e^x$
2) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$
3) $f(x)=2+\frac{e^x}{e^x-1}$
4) $f(x)=(3x+5)e^x$
5) $f(x)=(\sin x)e^x$
6) $f(x)=(-3x^2+2x)e^{-x}$
7) $\left(f(x)=e^{-x}-\sqrt{x}+2\right)$
8) $f(x)=e^{x^2+3x+2}$
9) $f(x)=\frac{e^{3x+1}}{x+3}$
10) $f(x)=\frac{3x+1}{e^{x+2}}$
11) $f(x)=(\cos x)e^{\frac{1}{x}}$
12) $f(x)=(x-1)e^{x^2}$

11- عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تكون فيها f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

1) $f(x)=e^{\cos x}$ 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$ 3) $f(x)=e^{x+|x|}$
4) $f(x)=e^{x+\sin x}$ 5) $f(x)=Ln\left(e^x+|x|\right)$ 6) $f(x)=\frac{e^{-|x|}-2}{e^x}$

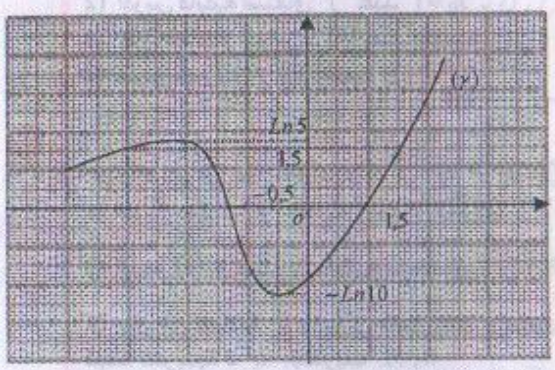
12- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)e^x$ ما مصداقية المعلومات التالية ؟
1) جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	0	↗	e	↘	$-\infty$

2) من اجل كل عدد حقيقي $m>0$ و $m\neq e$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلان او و لا حل
3) المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى الممثل لـ f .

13- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$ و ليكن (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس ، A نقطة إحداثييها $(Ln(2),Ln(2))$
1) اوجد a و b بحيث (γ) يمر من A و يقبل عندها مماسا موازيا لمحور الفواصل.
2-1) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال 1) .
ب) ارسم (γ) و المماس عند A .

14- f دالة معرفة على $]-4,+\infty[$ و منحناها البياني (γ) في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل



1) شكل جدول تغيرات f .
2) 1) عين تغيرات الدالة g المعرفة بـ $g(x)=e^{f(x)}$
ب) عين صور الأعداد -4 ، -2 ، -1 ، $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، 1 بالدالة g
جـ) ما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟
3) ارسم المنحنى البياني للدالة g في المعلم السابق
4) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\geq\frac{3}{2}$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $g(x)=1$ و حلول المتراجحة $g(x)\geq e\sqrt{e}$.

15- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x-x-2$
1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ثم شكل جدول تغيرات f .
2) استنتج من السؤال (1) أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان α و β بحيث $-1,5\geq\alpha\geq-1,6$
3) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

16- أدرس تغيرات الدوال التالية ،
1) $f(x)=xe^x-2$ 2) $f(x)=x-2+e^x$ 3) $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+3}$

4) $f(x)=\frac{x-3}{e^x}$ 5) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ 6) $f(x)=x-2+e^{-x}$

7) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+2}$ 8) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

17 f دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & ; \ x\le 1 \\ f(x)=1+Ln\,x & ; \ x>1 \end{cases}$

(γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) هل f مستمرة عند $x_0=1$ ؟

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.

3) عين معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,1)$

4) أدرس تغيرات f ثم أرسم (γ).

18 f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=(2-x)e^x-1$ و (γ) منحناها البياني.

1) أدرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أرسم (γ) في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1\le\alpha\le 2$ ثم عين قيمة تقريبية لـ α بتقريب $0,01$

4) أدرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

19 g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=xe^x-1$

1-1) أدرس تغيرات g ثم استنتج انه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $\alpha e^\alpha=1$

ب) أعط حصرا لـ α بتقريب $0,1$.

2) لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-Ln\,x$

أ) تحقق انه من أجل كل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب) أدرس تغيرات f ثم أرسم (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

20 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ ، (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

3) أدرس تغيرات f ثم أرسم (γ)

4) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $e^{2x}-e^x-2-m=0$ جبريا و بيانيا.

21 f دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند -1 و $(+\infty)$ ثم ماذا تستنتج حول المنحنى (γ) ؟

2) أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]-1,+\infty[$ و بين ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-1}{x+1}$

3) شكل جدول تغيرات f ثم أرسم المنحنى (γ) .

22 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-e)e^{-x}+1-x$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) احسب $f'(x)$ وبين أن لدينا $f'(x)=e^{-x}h(x)$ حيث h دالة يطلب تعيينها.

3-1) أدرس حسب قيم x إشارة $e-e^x$ ثم استنتج أن إذا كان :

$x<1$ فإن $1-x+e-e^x<0$ و $x>1$ فإن $1-x+e-e^x>0$

ب) شكل جدول تغيرات f مستنتجا أن $f(x)$ دوما سالبة.

4-1) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ (γ) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d).

ب) بين أنه توجد نقطة وحيدة A من (γ) بحيث المماس لـ (γ) عندها يوازي (d).

23 f دالة معرفة على مجال $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{Ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) g دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $g(x)=2x-(x-1)Ln(x-1)$

أ) ما هي نهاية $g(x)$ لما x يؤول إلى 1 ؟

ب) احسب $g'(x)$ من أجل كل $x>1$.

جـ) حل المتراجحة $0 \geq 1-Ln(x-1)$ على $]1,+\infty[$

د) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

هـ) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α على المجال $[e+1,e^3+1]$ و ادرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) لتكن h دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $h(x)=\dfrac{Ln(x^2-1)}{x}$

أ) عين نهاية $h(x)$ لما x يؤول إلى 1 و بين أن نهاية $h(x)$ لما $x \to +\infty$ تساوي 0

ب) احسب $h'(x)$ و بين أن $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1,+\infty[$

جـ) بين أن h متزايدة تماما على المجال $]1,\sqrt{\alpha}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha},+\infty[$

3- أ) تحقق أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=h(e^x)$

ب) - استنتج نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى 0 و لما x يؤول إلى $(+\infty)$

- استنتج اتجاه تغير f على المجال $]0,+\infty[$

- استنتج أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $Ln(\sqrt{\alpha})$ ثم ارسم (γ) .

24 -

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2e^x+2x-7$

1) أدرس نهاية g عند $-\infty$ و $(+\infty)$

2) أدرس إتجاه تغير g على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,94 \; ; \; 0,941[$

ب) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أدرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

2) أدرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

3) احسب $f'(x)$ و تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة مشكلا جدول تغيرات f .

4) أ) بين صحة المساواة التالية $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة بـ $h(x)=\dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $\left]-\infty,\dfrac{5}{2}\right[$

جـ) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$.

د) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب لـ (γ) عند $(+\infty)$ محددا وضعية (γ) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (d) و (γ) في نفس المعلم.

III) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ نعتبر النقط A_n ، B_n و C_n ذات الفاصلة n ،

تنتمي على التوالي إلى محور الفواصل ، المستقيم (d) و المنحنى (γ) ، و ليكن U_n عدد حقيقي معرف بـ $U_n=\dfrac{C_nA_n}{A_nB_n}$

1- أ) بين أنه من أجل $n \geq 3$ لدينا $U_n=\dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

ب) ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

جـ) احسب نهاية المتتالية (U_n) لما $n \to +\infty$ هل نستطيع تكهن هذه النتيجة من قبل ؟

26 -

f دالة معرفة بـ $f(x)=e^{-x}\sin 2x$

1) احسب $f'(x)$.

2) بين أن حلول $f'(x)=0$ تمثل متتالية حسابية و أن صورها بالدالة f تشكل متتالية هندسية .

20 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}} & , \; x \neq -1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية و قابلية اشتقاق f عند -1 .

2) أدرس تغيرات f ثم ارسم (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

27 -

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(\sin x)^3}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 0} x\,e^{\frac{1}{\sin x}}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)e^{\frac{x+1}{x+3}}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\left(\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{e^{x+1}}\right)$ ، 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(x+1)-e^x+1}{x^2}$

28 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^x$

1) $f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... $f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ f من $n \geq 1$.

أ) احسب من أجل كل x : $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$

2) بين بالتراجع أنه من أجل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x)=e^x\left(x^2+\alpha_n x+\beta_n\right)$ حيث α_n و β_n عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3) تحقق أن $\begin{cases} \alpha_{n+1}=\alpha_n+2 \\ \beta_{n+1}=\beta_n+\alpha_n \end{cases}$

4) تحقق أن (α_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين α_n بدلالة n .
5) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\beta_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1$
ثم احسب β_n بدلالة n

29

(E) معادلة تفاضلية $2y' + 3y = 0$... (E)
1) عين كل حلول المعادلة (E) .
2) (E') هي المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$
أ) عين f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية حلا لـ (E') .
ب) بين أنه إذا كانت g حلا لـ (E') فإن $f - g$ حلا لـ (E) و العكس صحيح.
جـ) أوجد كل حلول المعادلة (E') .
3) أوجد كل حلول المعادلة $2y' + 3y = \cos x$
(البحث عن الحل من الشكل $h(x) = a\cos x + b\sin x$)

30

عين الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة :
أ) $y' = -3y$ و $f(0) = 2$ ، ب) $2y' + 5y = 0$ و $f(1) = 0$
جـ) $y - 2y' = 0$ و $f'(1) = 1$ ، د) $y' = -3y + 1$ و $f(1) = 0$

31

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y' = -y + 4$
1) عين الحل f لـ (E) بحيث $f(0) = 2$
2) أرسم المنحنى الممثل لـ f على $[0,2]$ في معلم متعامد و متجانس.
3) أرسم في نفس المعلم تمثيلا مقربا لبيان f بواسطة طريقة أولر .

32

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y' - 3y = +2$
بين صحة أو خطإ كل قضية من القضايا التالية :
1) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ce^{3x} + 2$ مع $c \in \mathbb{R}$ حلولا لها .
2) الحل الخاص لـ (E) بحيث $f(0) = 2$ هو $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$
3) الحل الخاص g للمعادلة (E) الذي منحناه البياني يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة ذات الفاصلة 0 المعرف بـ $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$
4) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ce^{3x} + 2x$ كحلول لها .

33

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = x + 1$
نبحث عن الحل g المعرف بـ $g(x) = ax + b$ للمعادلة (E)
1) بين أنه إذا كانت g حلا لـ (E) فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون :
$ax + a + b = x + 1$ عندئذ عين a و b .
2) تحقق أن الدالة g المتحصل عليها هي حل لـ (E) .
3) بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت $f - g$ حلا $y' + y = 0$... (E')
4) حل المعادلة (E') ثم (E) .

34

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$
1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ حلا للمعادلة (E)
1-2) حل المعادلة (E') ... $y' + y = 0$.
ب) بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت $f - g$ حلا لـ (E')
جـ) استنتج كل حلول المعادلة (E) .

35

عند حقن مريض بكمية A من دواء ما فإن الكمية المتبقية في الدم عند اللحظة t بعد عملية التخلص الطبيعي هي $Ae^{-\frac{t}{24}}$. علما أن وحدة الزمن هي الساعة (h) ، مبدأ الأزمنة هي لحظة الحقن، وحدة الحجوم هي (cm^3)
1) ما هي كمية الدواء المتبقية بعد 8 ساعات من الحقن ؟
2) نحقن هذا المريض بجرعة A كل 8 ساعات، مثل بيانيا كمية الدواء الموجودة في الدم خلال 72 ساعة التي تلي الحقن الأول.
3) يكون الدواء فعالا إذا و فقط إذا كان الدم يحتوي على كمية على الأقل تساوي $3,19\,A$. باستعمال البيان السابق عين اللحظة التي ابتداء منها يصبح هذا الدواء فعال.
4-1) بين أنه بعد الحقن رقم n تكون كمية الدواء الموجودة في الدم هي $A \times \left(\frac{1-e^{-\frac{n}{3}}}{1-e^{-\frac{1}{3}}}\right)$
ب) أوجد بالحساب نتيجة السؤال (3) .
جـ) عندما تصبح كمية الدواء في الدم أكبر من $3,46\,A$ فإن الدواء يصبح خطيرا .
هل الاستمرار في وتيرة العلاج المطبقة في (2) خطيرة أم لا ؟ إذا علمت أن مدة العلاج المحددة من طرف الطبيب هي 4 أيام ؟

36 - نريد مقارنة الطرق المختلفة للتوفير بفائدة مركبة لذلك نودع مبلغ 10.000 DA في بنك بنسبة سنوية 5 % خلال 5 سنوات.

1) كم يصبح رصيده خلال هذه المدة ؟

2- أ) إذا كان الرصيد يزيد كل ستة أشهر بنسبة سنوية x' احسب x' ثم حدد رصيده خلال نفس الفترة.

ب) أجب عن السؤال (أ) من أجل تدخير ثلاثي الأشهر، شهري ، يومي.

مع العلم أنه إذا كانت x هي النسبة المئوية السنوية فإن النسبة الشهرية المكافئة لها هي x' حيث $(1+x')^{12}=1+x$

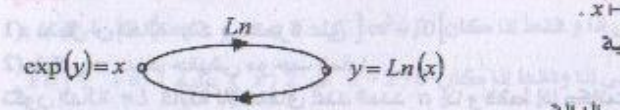
الدرس 5

الدَّالةُ اللّوغارِيتميةُ النّيبِريةُ

تمهيد

- رأينا في درس الدالة الأسية أن المعادلة $e^x=m$ مع $m>0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$، هذا الحل رمزنا له بـ $Ln(m)$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m ، العدد $Ln(m)$ يمثل العدد الحقيقي الذي صورته m بالدالة exp عندئذ نستطيع أن نعرف على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ الدالة $m\mapsto Ln(m)$ التي نرمز لها بصفة عامة $x\mapsto Ln(x)$.

و التي تسمى بالدالة اللوغاريتمية النيبرية و نرمز لها بـ Ln.



- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة العكسية للدالة exp و العكس صحيح

1 - الدالة اللوغاريتمية النيبرية

1 - 1 تعريف

- نسمي لوغاريتم نيبري لعدد حقيقي موجب تماما m ، الحل الوحيد للمعادلة $e^a=m$ ذات المجهول a و نرمز لهذا الحل بالرمز $Ln(m)$ و يقرأ " اللوغاريتم النيبري لـ m ".

- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $Ln(x)$ و نكتب $x \xrightarrow{Ln} Ln(x)$

نتيجة

1) من اجل كل عددين حقيقين موجبين تماما x و y لدينا :
$Ln(x)=y$ يكافئ $x=e^y$
2) $e^0=1$ يكافئ $Ln(1)=0$ و $e^1=e$ يكافئ $Ln(e)=1$
3) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $Ln(e^x)=x$
و من اجل كل $x>0$ لدينا $\exp(Ln(x))=x$

1 - 2 خواص

1) الدالة Ln معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$
2) الدالة Ln قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $Ln'(x)=\frac{1}{x}$ و $Ln(1+h)\approx h$ لما h يكون بجوار الصفر.
3) الدالة Ln متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و منه نستنتج ما يلي
$x>1$ يكافئ $Ln(x)>0$
$0<x<1$ يكافئ $Ln(x)<0$
من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b :
$a=b$ يكافئ $Ln(a)=Ln(b)$
$a<b$ يكافئ $Ln(a)<Ln(b)$

الإثبات

1) تقبل ان الدالة Ln مستمرة على $]0,+\infty[$
2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما.
تكون الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا و فقط إذا كانت نهاية النسبة $\frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$ لما x يؤول إلى a تساوي عدد حقيقي.
نضع $t(x)=\frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$ مع $x\neq a$.
نضع $Ln(x)=X$ و $Ln(a)=A$ و عليه لما $x\to a$ فإن $X\to Ln(a)=A$.

$$\lim_{x\to a} t(x) = \lim_{x\to a} \frac{Ln(x)-Ln(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{X\to A} \frac{X-A}{e^X-e^A} = \lim_{X\to A} \frac{1}{\frac{e^X-e^A}{X-A}} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{a}$$

إذن الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند a و عددها المشتق هو $\frac{1}{a}$

و عليه من اجل كل $x>0$ يكون $Ln'(x)=\frac{1}{x}$

$Ln(1+h) \approx Ln(1) + h \times Ln'(1) \approx h$

لأن $Ln'(1)=\frac{1}{1}=1$ و $Ln(1)=0$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $Ln'(x)$	‖	+	+
تغيرات Ln	‖	0 ↗ 1	↗

3) بما انه من اجل كل $x>0$ لدينا $\frac{1}{x}>0$ فإن الدالة Ln متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.
بما ان $Ln(1)=0$ فإن من اجل $x\in]0,1[$ يكون $Ln(x)<0$
و من اجل $x>1$ يكون $Ln(x)>0$

تمرين تدريبي ❶

عين في كل حالة من الحالات التالية المجموعة التي ينتمي إليها x بحيث العبارات المعطاة ذات معنى.
1) أ) $Ln(-x)$ ، ب) $Ln(x^2)$ ، جـ) $Ln(x-2)$
د) $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ، هـ) $Ln|x+1|$ ، و) $Ln|x^2-3x+2|$

✓ الحل

بما أن الدالة Ln معرفة على $]0,+\infty[$ فإن إلا الأعداد الموجبة تماما التي لها لوغاريتم.

أ) العبارة $Ln(-x)$ لها معنى إذا و فقط إذا $-x>0$ اي $x<0$.

ب) العبارة $Ln(x^2)$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ اي $x\neq 0$ و عليه $x\in \mathbb{R}-\{0\}$

جـ) العبارة $Ln(x-2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x-2>0$ اي $x>2$ و عليه $x\in]2,+\infty[$.

د) العبارة $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $\frac{x}{x+1}>0$ و $x+1\neq 0$
اي $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

هـ) العبارة $Ln|x+1|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x+1|>0$
اي $x+1\neq 0$
و هذا يعني ان $x\neq -1$ و منه $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

و) العبارة $Ln|x^2-3x+2|$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $|x^2-3x+2|>0$
اي $x^2-3x+2\neq 0$

$x^2-3x+2\neq 0$ يكافئ:
$(x\neq 1)$ و $(x\neq 2)$

و منه مجموعة قيم x المطلوبة هي
$\mathbb{R}-\{1\,,\,2\}$

تمرين تدريبي ❷

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $Ln(x^2+2)=Ln(3x)$ ، 2) $Ln(x^2+2)\geq Ln(3x)$

3) $3\left(Ln(x)\right)^2-2Ln(x)-1=0$ ، 4) $3e^{2x}-2e^x-1=0$

✓ الحل

- لحل المعادلة $LnV(x)=Ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $V(x)=U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E.
- لحل المتراجحة $LnV(x)\leq Ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل المتراجحة $V(x)\leq U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E.

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^2+2\rangle 0$

$3x\rangle 0$ يكافئ $x\rangle 0$ و منه المجموعة E هي $]0,+\infty[$

نضع $V(x)=x^2+2$ و $U(x)=3x$

$V(x)=U(x)$ يكافئ $x^2-3x+2=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=2)$

بما أن 1 و 2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{1\,,\,2\}$.

2) المجموعة E هي $]0,+\infty[$.

$V(x)\geq U(x)$ يكافئ $x^2-3x+2\geq 0$

لكي يكون $x^2-3x+2\geq 0$ يجب أن يكون $x\in]-\infty\,,\,1]\cup[2\,,+\infty[$ و منه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي:

$$S=]0\,,+\infty[\cap(]-\infty\,,\,1]\cup[2\,,+\infty[)=]0,1]\cup[2\,,+\infty[$$

3) $3(Ln\,x)^2-2Ln(x)-1=0$... (*)

المجموعة المرجعية E هي $]0,+\infty[$.

بوضع $Ln(x)=X$ المعادلة (*) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلين هما 1 و $-\frac{1}{3}$

$Ln(x)=1$ يكافئ $x=e$

$Ln(x)=-\frac{1}{3}$ يكافئ $x=e^{-\frac{1}{3}}$

بما أن e و $e^{-\frac{1}{3}}$ ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $S=\left\{e\,,\,e^{-\frac{1}{3}}\right\}$

4) المجموعة المرجعية E للمعادلة $3e^{2x}-2e^x-1=0$ هي $\mathbb{R}$.

بوضع $e^x=X$ فإن المعادلة (4) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلان 1 و $-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $X\rangle 0$ و الحل 1 مقبول.

$e^x=1$ يكافئ $x=Ln(1)=0$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S=\{0\}$.

❷ - الخاصية الأساسية و نتائجها

2 - 1 الخاصية الأساسية

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b يكون $Ln(a\times b)=Ln(a)+Ln(b)$

الإثبات

لدينا $e^{Ln(a\times b)}=a\times b$ (1)

$e^{Ln(a)+Ln(b)}=e^{Ln(a)}\times e^{Ln(b)}=a\times b$ (2)

من (1) و (2) نجد $e^{Ln(ab)}=e^{Ln(a)+Ln(b)}$ و بما أن الدالة exp تقابل فإنه ينتج $Ln(ab)=Ln(a)+Ln(b)$.

2 - 2 نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

1) $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$ ، 2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right)=Ln(a)-Ln(b)$ ، 3) $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$

4) $Ln\left(\sqrt[n]{a}\right)=\frac{1}{n}Ln(a)$ ، 5) $Ln(a^{-n})=-n\,Ln(a)$

الإثبات

1) $Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(b)+Ln\left(\frac{1}{b}\right)$ (1)

$Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(1)=0$ (2)

من (1) و (2) نجد $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$

2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = Ln(a) + Ln\left(\frac{1}{b}\right)$
$= Ln(a) - Ln(b)$

3) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n :

نسمي P_n الخاصية " $Ln(a^n) = n\,Ln(a)$ "

P_1 صحيحة لأن $Ln(a^1) = Ln(a)$

نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $Ln(a^n) = n\,Ln(a)$

و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $Ln(a^{n+1}) = (n+1)\,Ln(a)$

$Ln(a^{n+1}) = Ln(a^n \times a^1) = Ln(a^n) + Ln(a) = n\,Ln(a) + Ln(a) = (n+1)\,Ln(a)$

منه " P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

4) $Ln(a^{-n}) = Ln\left(\frac{1}{a^n}\right)$
$= -Ln(a^n) = -n\,Ln(a)$

5) لدينا $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ومنه ينتج $Ln\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = Ln(a)$ و بتطبيق نتيجة (3) نجد

$n\,Ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = Ln(a)$ بقسمة طرفي هذه المساواة على n نجد $Ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}Ln(a)$

ملاحظة

إذا كان a و b عددين حقيقيين سالبين تماما فإن $ab > 0$ و بالتالي نكتب
$ab = |ab| = |a||b|$ و $Ln(ab) = Ln(|a|) + Ln(|b|)$

مبرهنة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بحيث $f(ab) = f(a) + f(b)$ فإن الدالة f هي من الشكل $k\,Ln$.

و إذا أضيف الشرط $f(e) = 1$ فإن f هي الدالة Ln

الإثبات

- لدينا $f(1) = 0$ منه نجد $f(a \times 1) = f(a) + f(1)$

- لنعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x) = f(ax) - f(x)$ مع $a > 0$

من اجل كل $x > 0$ لدينا $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$.

إذن الدالة g ثابتة.

و بما ان g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$ و $g'(x) = 0$

ينتج $af'(ax) = f'(x)$.

من اجل $x = 1$ نجد $af'(a) = f'(1)$

و إذا وضعنا $f'(1) = k$ فإن $f'(a) = \frac{k}{a}$

إذن من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $f'(x) = \frac{k}{x}$.

نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = f(x) - k\,Ln(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $h'(x) = f'(x) - \frac{k}{x} = \frac{k}{x} - \frac{k}{x} = 0$

إذن الدالة h ثابتة على المجال $]0,+\infty[$

و من أجل كل $x > 0$ لدينا $h(x) = h(1) = f(1) = 0$ إذن $f(x) = k\,Ln(x)$.

بما ان $f(e) = k\,Ln(e) = k$ و $f(e) = 1$ فإن $k = 1$ و بالتالي $f(x) = Ln(x)$.

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية $A = Ln(\sqrt{2}+1) + Ln(\sqrt{2}-1)$
$B = Ln(\sqrt{2}+1)^3 + Ln(\sqrt{2}-1)^3$ ، $C = Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - Ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

✓ الحل

$A = Ln(\sqrt{2}+1) + Ln(\sqrt{2}-1) = Ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = Ln\left((\sqrt{2})^2 - 1^2\right) = Ln(1) = 0$

$B = 3\,Ln(\sqrt{2}+1) + 3\,Ln(\sqrt{2}-1) = 3\left(Ln(\sqrt{2}+1) + Ln(\sqrt{2}-1)\right) = 3A = 0$

$C = Ln\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{1}\right) = 2\,Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات و المتراجحات التالية في $\mathbb{R}$.

1) $Ln(x+4)(x+2) = Ln(8)$ ، 2) $Ln(x+4) + Ln(x+2) = Ln(8)$

3) $Ln(x+4)(x+2) \le Ln(8)$ ، 4) $Ln(x+4) + Ln(x+2) \le Ln(8)$

✓ الحل

لحل معادلات (متراجحات) يظهر فيها اللوغاريتم نبحث أولا عن المجموعة E مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة) ثم نكتب المعادلة المعطاة على الشكل $Ln(V(x)) = Ln(U(x))$
(المتراجحة المعطاة على الشكل $Ln(V(x)) \le Ln(U(x))$)

1) x لا يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2)\rangle 0$
أي $x\in]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ و منه $E=]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$.
$Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$ يكافئ $(x+4)(x+2)=(8)$ يكافئ $x^2+6x=0$
و حلا المعادلة $x^2+6x=0$ هما $(x=0)$ و $(x=-6)$
بما أن 0 و 6- ينتميان إلى E فإن مجموعة الحلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0,-6\}$.

2) x لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $0\langle x+4$ و $0\langle x+2$ اي $x\langle -4$ و $x\langle -2$ و منه $E=]-2,+\infty[$. و تكتب في E على الشكل *... $Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$.
حل المعادلة (*) يؤول إلى حل المعادلة $(x+4)(x+2)=8$
$(x+4)(x+2)=8$ يكافئ $x=0$ أو $x=-6$ و 6- لا ينتمي إلى E
و بالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0\}$

3) المجموعة المرجعية E هي $E=]-2,+\infty[$.
المتراجحة المقترحة تكتب في E على الشكل * ... $Ln(x+4)(x+2)\le Ln(8)$
حل المتراجحة (*) يؤول إلى حل المتراجحة $(x+4)(x+2)\le 8$
$(x+4)(x+2)\le 8$ يكافئ $x\in]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S=E\cap]-6,0[=]-2,0[$

4) x لا يكون حلا للمتراجحة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2)\rangle 0$ أي
$x\in]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ و منه $E=]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$.
المتراجحة المقترحة تكتب في E على شكل $(x+4)(x+2)\le 8$ اي $x^2+6x\le 0$
$x^2+6x\le 0$ يكافئ $x\in]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S=E\cap]-6,0[=]-6,-4[\cup]-2,0[$

3 دراسة الدالة Ln

3-1 حساب النهايات عند $(+\infty)$ و 0

مبرهنة
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 0} Ln(x)=-\infty$

الإثبات

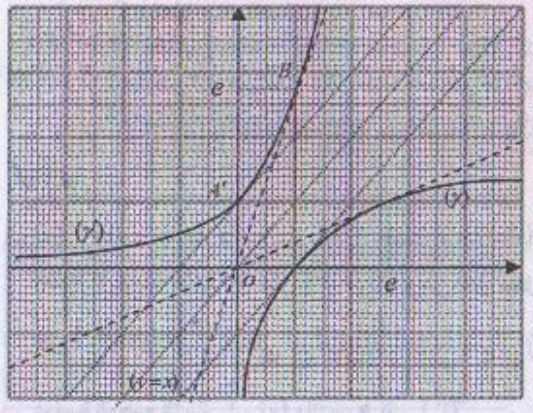
الطريقة الأولى
بوضع $Ln\,x=y$ نجد $x=e^y$.
بما أن x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن e^y يؤول إلى $(+\infty)$ و لكي يؤول e^y إلى $(+\infty)$ يجب أن يؤول y إلى $(+\infty)$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$.

الطريقة الثانية
لإثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ يجب أن نبين من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد على الأقل عدد حقيقي β بحيث إذا كان $x\rangle\beta$ يكون $Ln\,x\rangle A$.
بما أن الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $Ln\,x\rangle A$ يكافئ $x\rangle e^A$
إذن من أجل كل عدد حقيقي تماما A يوجد عدد حقيقي $\beta=e^A$
بحيث إذا كان $x\rangle\beta$ يكون $Ln\,x\rangle A$.

2) من أجل كل $x\rangle 0$ نضع $X=\frac{1}{x}$
ومنه نجد $Ln\,x=-Ln\,X$
$\lim\limits_{x\to 0} Ln\,x=\lim\limits_{X\to+\infty} -Ln\,X=-\infty$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\frac{1}{x}$	‖	+	
تغيرات Ln	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3-2 التمثيل البياني للدالة Ln



مبرهنة
المنحنيان المثلان للدالتين Ln و exp متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس.
- (γ') له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$ إذن (γ) له مستقيم مقارب معادلته $x=0$ بجوار 0
- المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مماس لـ (γ') عند النقطة $A'(0,1)$ و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,0)$.

تمرين تدريبي 1

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين
1) $(Ln\,x)^2-3(Ln\,x)+2=0$ ، 2) $(Ln\,x-2)(Ln(x)-4)\le 0$

✓ الحل

1) المجموعة المرجعية للمعادلة (1) هي $E=]0,+\infty[$.
بوضع $X=Ln\,x$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2-3X+2=0$
و حلول هذه الأخيرة هي 1 و 2

$Ln\,x=1$ يكافئ $x=e^1=e$

$Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

و بما أن e و e^2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{e\ ,\ e^2\}$.

2) المجموعة المرجعية للمتراجحة (2) هي $E=]0,+\infty[$.

بوضع $X=Ln\,x$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-4)(X-2)\leq 0$

و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $[\ 2\ ,\ 4\]$ أي $2\leq X\leq 4$ لكن $Ln\,e^4=4$ و $Ln\,e^2=2$

بالتالي $Ln\,e^2\leq Ln\,x\leq Ln\,e^4$

و منه ينتج $e^2\leq x\leq e^4$ (لأن الدالة Ln متزايدة تماما)

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=[e^2,e^4]$.

تمرين تدريبي ❷

(γ) المنحنى البياني للدالة Ln في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

C نقطة منه فاصلتها a مع $a>0$.

1) اكتب بدلالة a معادلة المماس (Ta) للمنحنى (γ) عند النقطة C

2) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي $a>0$ أن المماس (Ta) يقع فوق (γ).

3) استنتج انه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\leq x-1$

✓ الحل

1) (Ta) ، $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $f(x)=Ln\,x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$

إذن $f'(a)=\frac{1}{a}$ و بالتالي (T_a) : $y=\frac{1}{a}(x-a)+Ln\,a$

2) دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T_a).

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى المماس (T_a) ندرس إشارة المقدار

$d(x)=Ln\,x-\left(\frac{x}{a}-1+Ln\,a\right)$ ومن أجل ذلك ندرس الدالة d.

الدالة d قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من أجل كل $x>0$

لدينا $d'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}$.

نلاحظ من الجدول أن من أجل كل $x\neq a$ لدينا $d(x)<0$.

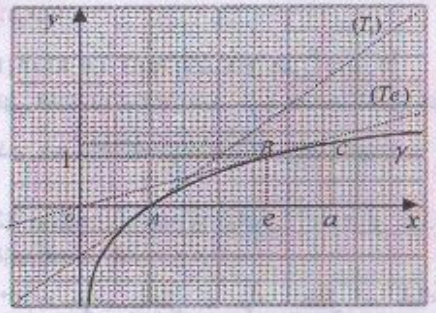
إذن المنحنى (γ) يقع تحت المماس (Ta)

x	0		a		$+\infty$
إشارة $d'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
تغيرات d	‖	↗		↘	

و عليه من أجل كل $x>0$ يكون

$Ln\,x\leq Ln\,a+\frac{x-a}{a}$

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,0)$ و بالتالي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) اي من أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\leq x-1$.



تمرين تدريبي ❸

بين انه من أجل كل $x>0$ يكون $Ln\,x<\sqrt{x}$

✓ الحل

الطريقة المناسبة للبرهان على أن $Ln\,x<\sqrt{x}$ من أجل كل $x>0$ هي دراسة تغيرات الدالة f المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln\,x-\sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=4$

$2-\sqrt{x}\geq 0$ يكافئ $x\leq 4$

$2-\sqrt{x}\leq 0$ يكافئ $x\geq 4$

x	0		4		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
تغيرات f	‖	↗	$Ln(4)-2$	↘	

بما أن $2,718<e<2,719$ فإن

$e^2>4$ و بالتالي $Ln\,e^2>Ln\,4$

اي $Ln(4)-2<0$

اذن من أجل كل x من $]0,+\infty[$

يكون $f(x)<0$ و بالتالي $Ln\,x-\sqrt{x}<0$ اي $Ln\,x<\sqrt{x}$.

❹ نهايات شهيرة

مبرهنة

1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{Ln(1+h)}{h}=1$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ 3) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} x\,Ln\,x=\overset{-}{0}$

الإثبات

1) الدالة Ln قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

فهي قابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق هو $Ln'(1)=1$

إذن $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Ln(1+h)-Ln(1)}{h}=1$ أي $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Ln(1+h)}{h}=1$

2) بوضع $X=Ln(x)$ يكون $x=e^X$ و لما $x\to+\infty$

فإن $X\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0^+$$

3) بوضع $X=\dfrac{1}{x}$ يكون $x\,Ln\,x=-\dfrac{Ln\,X}{X}$

ولما x يؤول إلى الصفر بقيم أكبر فإن X يؤول إلى $+\infty$

وعليه $\lim\limits_{x\xrightarrow{+}0}x\,Ln\,x=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{Ln\,X}{X}=\bar{0}$

ملاحظة

بوضع $x=X-1$ العبارة $\dfrac{Ln(1+x)}{x}$ تكتب $\dfrac{Ln\,X}{X-1}$

و عليه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Ln\,X}{X-1}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{Ln(x+1)}{x}=1$

التفسير الهندسي والتحليلي للنهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$

- إذا كانت M نقطة كيفية من التمثيل البياني للدالة Ln فإن إحداثياتها $(x\,,\,Ln\,x)$.

المستقيم (OM) معامل توجيهه $\dfrac{Ln\,x}{x}$ و عليه لما x يأخذ قيما كبيرة جدا، فإن المستقيم (OM) يقترب أكثر فأكثر من محور الفواصل، حينئذ نستطيع القول ان المنحني البياني (γ) للدالة Ln لا يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

- المسافة العمودية بين (γ) و محور الفواصل تتزايد ببطئ شديد كلما أخذ x قيما كبيرة جدا و هذا يجعلنا نرى ان المنحني (γ) على شكل قطع مستقيمة موازية لـ $(x'x)$. على مجال من الشكل $[a,b]$ حيث a و b كبيرتان جدا .

- النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ تسمح لنا بمقارنة x و $Ln\,x$ من أجل قيم كبرى لـ x .

نقول ان x تتفوق على $Ln\,x$ بجوار $(+\infty)$.

تمرين تدريبي 1

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+Ln\,x\right)$ ، 2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{+}0}\dfrac{1}{x\,Ln\,x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ ، 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,Ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

الحل

1) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$

فإنه حسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+Ln\,x\right)=+\infty$

2) بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{+}0}x\,Ln\,x=\bar{0}$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{+}0}\dfrac{1}{x\,Ln\,x}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$ و عليه $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)=+\infty-\infty$

من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=x\left(1-\dfrac{Ln\,x}{x}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln\,x}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

و منه نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

نبحث عن كتابة اخرى لـ $f(x)=Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ بحيث تظهر النهايات الشهيرة.

ومن أجل كل $x>1$ يكون $f(x)=Ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$

لكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=Ln\,2$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

و منه نحصل على عدم التعيين من الشكل $0\times\infty$ بوضع $X=-\dfrac{1}{x}$ فإن العبارة $x\,Ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ تصبح $-\dfrac{Ln(1+X)}{X}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,Ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to 0}-\dfrac{Ln(1+X)}{X}=-1$

تمرين تدريبي . ❷

باعتبار انه من أجل كل $0<x$ و $0<a$ لدينا $Ln\,x \le Ln\,a+\frac{x-a}{a}$ *

1) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $0<a$ يكون ، $Ln(a+1)-Ln(a)\le\frac{1}{a}$

2) ما هو شكل المنحني (γ) في المجال $[100,101]$ ؟

✓ الحل

1) بوضع $x=a+1$ في المتباينة (*) نجد $Ln(a+1)\le Ln\,a+\frac{a+1-a}{a}$

اي $Ln(a+1)-Ln\,a\le\frac{1}{a}$ (**)

2) بوضع $a=100$ في العلاقة (**) نجد $Ln\,101-Ln\,100\le\frac{1}{10^2}$ و منه نستنتج ان النقطتين $A(100\ ,\ Ln100)$ و $B(101\ ,\ Ln101)$ لهما نفس الترتيب تقريبا و هذا مما يفسر ان (γ) في المجال $[100,101]$ على شكل قطعة مستقيمة موازية لـ (xx') .

❺ . اللوغاريتم العشري

5 - 1 تعريف

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $Log\,x=\frac{Ln\,x}{Ln\,10}$ مع $Log\,10=1$ و $Log\,1=0$.

5 - 2 خواص

1) الدالة Log معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

2) الدالة Log متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ لأن $Ln\,10>0$.

3) الدالة Log لها نفس الخواص الجبرية للدالة Ln .

و بصفة خاصة انه من اجل كل عددين حقيقيين a و b و من اجل كل عدد طبيعي كيفي p ،

$Log\,ab=Log\,a+Log\,b$ و $Log\,a^p=p\,Log\,a$ و $Log\,10^p=p$.

4) من أجل كل عدد حقيقي A موجب تماما لدينا

$10^n\le A<10^{n+1}$ يكافىء $n\le Log\,A<n+1$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (γ)

تمرين تدريبي

باعتبار أن عددا A يحقق $10^n\le A<10^{n+1}$ حيث n عدد طبيعي.

1) ما هو عدد ارقام جزئه الصحيح ؟

ثم استنتج حصرا للعدد $Log\,A$ معينا الجزء الصحيح لـ $Log\,A$.

2) إذا علمت أن $Log\,A=5,52$ ما هو عدد أرقام جزئه الصحيح لـ A و $\sqrt{A}$ و A^{100} ؟

✓ الحل

1) عدد يتألف من رقمين يكون محصورا بين 10 و 100 ، و آخر يتألف من ثلاثة ارقام يكون محصورا بين 100 و 1000 و بشكل عام فإن العدد المحصور بين 10^n و 10^{n+1} عدد ارقامه $(n+1)$

$10^n\le A<10^{n+1}$ يكافىء $n\le Log\,A<n+1$ و بالتالي الجزء الصحيح لـ $Log\,A$ هو n .

2) - نعلم أن $5\le Log\,A<6$ و منه ينتج $10^5\le A<10^6$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح للعدد A هو 6

- لدينا $Log\sqrt{A}=\frac{1}{2}Log\,A=2,760$ و منه ينتج $10^2\le\sqrt{A}<10^3$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ $\sqrt{A}$ هو 3

- لدينا $Log\,A^{100}=100\,Log\,A=552$ و عليه يكون $552\le Log\,A^{100}<553$

ومنه ينتج $10^{552}\le A^{100}<10^{553}$ و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ A^{100} هو 553 .

❻ . الدالة المركبة مع الدالة Ln

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال I و لنعتبر الدالة g المعرفة بـ $g=Ln\circ U$

برهنة

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على I و من أجل كل x من I لدينا $g'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}$

وإشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $U'(x)$.

الإثبات

- من أجل كل x من I لدينا $g'(x)=(Ln\,u(x))'=U'(x)\times L'n(U(x))$

وبما انه من اجل كل $x>0$ لدينا $L'n(x)=\frac{1}{x}$ فإن $L'n(U(x))=\frac{1}{U(x)}$

لذن $g'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}$

- بما ان $U(x)>0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $U'(x)$.

نتيجة

الدالة المشتقة للدالة $x \to Ln|U(x)|$ هي الدالة $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$

خواص

1) الدالتان U و $Ln \circ U$ لهما نفس اتجاه التغير على I .

2) في كل ما يلي نعتبر (*) إما عدد a أو $+\infty$ أو $-\infty$.

- إذا كان $\lim\limits_{x \to *} U(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to *} Ln(U(x)) = +\infty$.

- إذا كان $\lim\limits_{x \to *} U(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to *} Ln(U(x)) = -\infty$.

- إذا كان $\lim\limits_{x \to *} U(x) = b$ فإن $\lim\limits_{x \to *} Ln(U(x)) = Ln(b)$ بحيث $b > 0$.

تمرين تدريبي ❶

ادرس تغيرات الدالة g المعرفة بالعبارة $g(x) = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

✓ الحل

- الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$

أي $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ ومنه $D_g =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

- الدالة g معرفة وقابلة الاشتقاق على D_g لأنها مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على D_g هما :

$x \xrightarrow{U} \frac{x}{x+1}$ و $x \xrightarrow{f} Ln(x)$

ومن أجل كل x من D_g لدينا $g'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

ومن أجل كل x من D_g يكون $g'(x) > 0$

ومنه g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]0,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
تغيرات g	0	↗	$+\infty$ ‖	↗	$-\infty$ ‖	↗	0

- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = Ln(1) = 0$

- بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = Ln(1) = 0$

- بما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x+1} = 0^+$ فإن $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

- بما أن $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$

$x = 0$ و $x = -1$ و $y = 0$ مستقيمات مقاربة لـ (C_g)

تمرين تدريبي ❷

1) بدراسة تغيرات الدالة $x \xrightarrow{f} Ln\,x + 1 - x$ على المجال $]0,+\infty[$ بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $Ln\,x \le x - 1$... (1)

2) باستعمال المتباينة (1)

أ) بين أنه من أجل كل $t > -1$ يكون $Ln(1+t) \le t$

ب) بوضع $x = \frac{1}{1+t}$ بين أنه من أجل كل $t > -1$ يكون $Ln(1+t) \ge \frac{t}{t+1}$.

ثم استنتج حصرا للعدد $Ln(1+x)$ من أجل كل $x > -1$

3) بوضع $x = \frac{1}{p}$ مع p عدد طبيعي غير معدوم .

أ) بين أن $\frac{1}{p+1} \le Ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

ب) (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- بين أن $U_n + \frac{1}{2n} \le Ln(2) \le U_n$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة نحو $Ln(2)$.

- اعط حصرا $Ln(2)$ من أجل $n = 5$.

✓ الحل

1) الدالة f معرفة وقابلة الاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$ يكافيء $x = 1$

- إذا كان $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0,1[$.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\infty$ ‖	↗	0	↘	$-\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x} + \frac{1-x}{x}\right)$

$= -\infty$

نلاحظ من جدول تغيرات f أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما. لدينا

$0 \leq f(x)$ اي $Ln(x) \leq x-1$

2) أ) لدينا $Ln(x) \leq -1+x$ (أ)

بوضع $x=1+t$ في العبارة (1) نجد $Ln(1+t) \leq -1+(1+t)$

اي $Ln(1+t) \leq t$ (*)

ب) بوضع $x=\frac{1}{1+t}$ في العبارة (1) نجد $Ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq -1+\frac{1}{1+t}$

بالتبسيط $Ln(1+t) \geq \frac{t}{1+t}$ (**)

من (*) و (**) نجد $\frac{t}{1+t} \leq Ln(1+t) \leq t$... (1)

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا $\frac{x}{1+x} \leq Ln(1+x) \leq x$

3) أ) بوضع $x=\frac{1}{p}$ في العبارة (أ) نجد $\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} \leq Ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

بالتبسيط نجد $\frac{1}{p+1} \leq Ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

ب) من أجل $p=n$ لدينا $\frac{1}{n+1} \leq Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

من أجل $p=n+1$ لدينا $\frac{1}{n+2} \leq Ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

من أجل $p=n+2$ لدينا $\frac{1}{n+3} \leq Ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+2}$,

⋮ , ⋮ , ⋮

من أجل $p=2n-1$ لدينا $\frac{1}{2n} \leq Ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1}$

بجمع أطراف المتباينات طرفا إلى طرف وحسب خواص الدالة Ln نجد :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \leq Ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$$

بالتبسيط نجد $U_n \leq Ln\left(\frac{2n}{n}\right) \leq U_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$ اي $U_n \leq Ln(2) \leq U_n+\frac{1}{2n}$.

$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$

و منه نستنتج ان (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن $U_n \leq Ln(2)$ فإنه (U_n) محدودة من الأعلى وعليه فالمتتالية متقاربة نحو ℓ

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد :

$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}U_n=Ln\,2$

إذن $\lim_{n\to+\infty}U_n=Ln(2)$

- من أجل $n=5$ لدينا $U_5 \leq Ln(2) \leq U_5+\frac{1}{10}$

$U_5=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ و منه $U_5=0{,}643$ و بالتالي $0{,}643 \leq Ln(2) \leq 0{,}743$

7. دراسة الدالة $x \xrightarrow{f} a^x$ مع $a>0$ و $a\neq 1$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $a^x=e^{x\,Ln\,a}$

إذن $f_a(x)=e^{x\,Ln\,a}$ و تكتب ايضا $f_a(x)=e^{u(x)}$ حيث $U(x)=x\,Ln\,a$.

إذن f_a هي الدالة المركبة $exp\,OU$ التي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها بـ $\exp_a$

7 - 1 اتجاه تغير f_a

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي $a>0$ و $a\neq 1$ الدالة f_a المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_a(x)=a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=(Ln\,a)a^x$

الإثبات

بما أن الدالة $x \xrightarrow{u} x\,Ln\,a$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة $f_a=\exp OU$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$f_a'(x)=(\exp OU)'(x)=u'(x)\exp'(u(x))=Ln(a)\times e^{u(x)}=Ln(a)\times a^x$

نتيجة

إشارة $f_a'(x)$ من إشارة $Ln(a)$ لأن $a^x>0$

- إذا كان $a>1$ فإن $f_a'(x)>0$ ومنه f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- إذا كان $0<a<1$ فإن $f_a'(x)<0$ ومنه f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

مثال ◆

$\left(\left(\sqrt{2}\right)^x\right)'=Ln\left(\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{2}\right)^x$, $(2^x)'=Ln(2)\times 2^x$

7 - 2 نهاية f_a عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

بما أن $a^x = e^{x\,Ln(a)}$ و بما أن $Ln(a)$ يغير إشارته في جوار 1 فإننا نميز حالتين بالنسبة إلى a :

-الحالة الأولى $0 < a < 1$

بما أن $0 < a < 1$ فإن $Ln(a) < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

-الحالة الثانية $a > 1$

بما أن $a > 1$ فإن $Ln(a) > 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

إليك جدول تغيرات f_a :

الحالة $1 > a > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	إشارة $f'_a(x)$	$-$	
	تغيرات f_a	$+\infty$	0

الحالة $a > 1$	x	$-\infty$	$+\infty$
	إشارة $f'_a(x)$	$+$	
	تغيرات f_a	0	$+\infty$

ملاحظة

1) الدالة f_a هي الدالة العكسية للدالة Log_a حيث $Log_a x = \dfrac{Ln\,x}{Ln\,a}$

$$Log_a y = \frac{Ln\,y}{Ln\,a} = x \quad \overset{f_a}{\underset{Log_a}{\rightleftarrows}} \quad y = a^x$$

2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_{\frac{1}{a}}(x) = e^{x\,Ln\left(\frac{1}{a}\right)} = e^{-x\,Ln(a)} = f_a(-x)$

منه نستنتج أن المنحنيين الممثلين لـ $f_{\frac{1}{a}}$ و f_a متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

تمرين تدريبي

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها (γ) حيث $f(x) = (2-x)\times 3^x$

2) ادرس تغيرات g ثم ارسم منحناها (Γ) حيث $g(x) = x - 2^x \times \dfrac{1}{Ln(2)}$

✓ الحل

1) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما: $x \mapsto 3^x$ و $x \mapsto 2-x$

و لدينا $f'(x) = 3^x\left(-x\,Ln\,3 + 2\,Ln(3) - 1\right)$

$f'(x) = 0$ تكافئ $x = \dfrac{2\,Ln(3)-1}{Ln(3)} = \alpha$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\left(-x\,Ln(3) + 2\,Ln(3) - 1\right)$ و عليه

- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]\alpha, +\infty[$
- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty, \alpha[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (0)(+\infty)$ عدم التعيين.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^{x\,Ln(3)} = \lim_{x\to-\infty} \left[2\,e^{x\,Ln(3)} - x\,e^{x\,Ln(3)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[2\,e^{x\,Ln(3)} - \frac{1}{Ln(3)}\,x\,Ln(3)\times e^{x\,Ln(3)}\right] = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,Ln(3)\,e^{x\,Ln(3)} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,e^{x\,Ln(3)} = 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	0	$-$
تغيرات f	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

$f(\alpha) = 3{,}0135$ ، $\alpha \approx 1{,}1$

2) - الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x) = 1 - 2^x = 1 - e^{x\,Ln(2)}$

$g'(x) = 0$ يكافئ $2^x = 1$ يكافئ $x = 0$.

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ أي $g'(x) > 0$ ومنه g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ أي $g'(x) > 0$ و منه g متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	0	$-$
تغيرات g	$-\infty$	$\frac{-1}{Ln(2)}$	$-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{1}{Ln(2)}\, e^{x\,Ln(2)}\right]$$

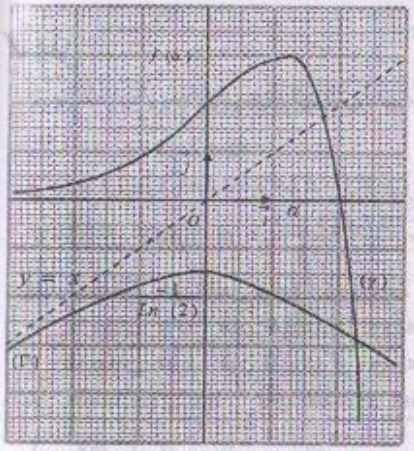
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[1 - \frac{e^{x\,Ln(2)}}{x\,Ln(2)}\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\,Ln(2)}}{x\,Ln(2)} = +\infty$

- المنحنى (γ) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} -2^x \times \frac{1}{Ln(2)} = \overline{0}$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ في جوار $(-\infty)$



8 - الأسس الحقيقية

من اجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و من اجل كل عدد حقيقي b نرمز الى a^b بالرمز $e^{b\,Ln(a)}$ و نكتب عندئذ $a^b = e^{b\,Ln(a)}$.

نتيجة

من اجل كل عدد حقيقي b و من اجل كل عدد حقيقي $a > 0$ لدينا $Ln(a^b) = b\,Ln(a)$

ملاحظة

- إذا كان b عدد صحيح فإن الكتابة a^b لها معنى من اجل كل عدد حقيقي a غير معدوم
- إذا كانت b عدد حقيقي غير صحيح فإن a^b لا يكون معرفا إلا من اجل $a > 0$.

مثال

1) $3^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\,Ln(3)}$ ، 2) $2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Ln(2)}$

3) $(-2)^{\frac{1}{2}} \neq e^{\frac{1}{2}Ln(-2)}$ لأن $Ln(-2)$ غير موجود

برهنة

من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $a' > 0$ و من أجل كل عددين حقيقيين b و b' لدينا:

1) $1^b = 1$ ، 2) $a^b \times a^{b'} = a^{b+b'}$ و $(a\,a')^b = a^b \times a'^b$

3) $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$ و $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ و $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

الإثبات

1) $Ln(1^b) = b\,Ln(1) = 0$ ومنه $1^b = 1$ لأن الدالة Ln متزايدة تماما.

2) $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ و عليه $Ln(a^b)^{b'} = b'Ln(a^b) = b'b\,Ln(a) = Ln(a^{bb'})$

$Ln\left(\frac{a^b}{a^{b'}}\right) = Ln(a^b) - Ln(a^{b'}) = b\,Ln(a) - b'Ln(a) = (b-b')\,Ln(a) = Ln(a^{b-b'})$

ومنه $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ بنفس الكيفية نبين النتائج الأخرى.

ملاحظة

- المساواة $(e^a)^b = e^{a\,b}$ محققة من أجل كل a عدد حقيقي و b عدد صحيح و تبقى صحيحة من اجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b.
- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ غير محققة من اجل اعداد حقيقية a ($a < 0$) و هذا عندما يكون b و b' عددان حقيقيان غير صحيحين.

9 - الدوال : $x \mapsto x^n$ مع n عدد صحيح غير معدوم

من أجل كل عدد صحيح n غير معدوم، f_n هي الدالة $x \mapsto x^n$ و (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

لما يكون n عددا صحيحا سالبا غير معدوم و x عددا حقيقيا غير معدوم $f_n(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

إذن ندرس الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

1) دراسة الدالة $x \mapsto x^n$ و $n \geq 1$

f_n معرفة على $\mathbb{R}$.

إذا كان n زوجيا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = f_n(x)$ أي f_n زوجية.

إذا كان n فرديا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = -f_n(x)$ أي f_n فردية.

- دراسة تغيرات f_n

بما أن f_n زوجية أو فردية (حسب n) فإننا نقتصر دراستها على $[0, +\infty[$.

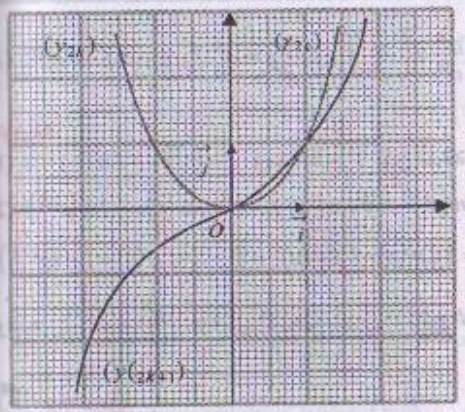
- إذا كان $n = 1$ فإن $f_n(x) = x$.

و هي دالة تآلفيه بيانها مستقيم معادلته $y = x$.

- إذا كان $n \geq 2$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ؛ $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

من أجل كل $x>0$ لدينا $f_n'(x)>0$
بالتالي f_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	0	$+\infty$
إشارة $f_n'(x)$	‖	$+$
تغيرات f_n	0	$+\infty$

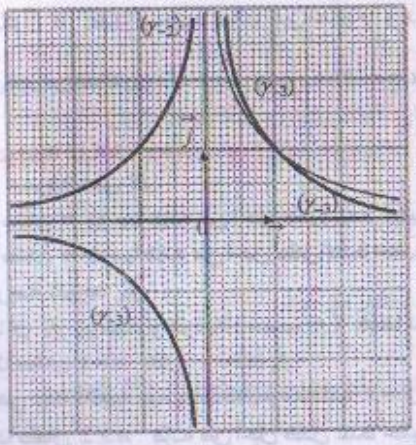


صورة $]0,+\infty[$ بالدالة f_n هي $]0,+\infty[$
وبالتالي f_n تقابل من:
$]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.
و التمثيل البياني للدالة f_n هو المنحنى (γ_n) يقبل مماسا افقيا في النقطة $O(0,0)$.

ب) دراسة الدالة $x\mapsto\frac{1}{x^n}$: f_n و $n\geq 1$

f_n معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.
- إذا كان n زوجيا فإن f_n زوجية و إذا كان n فرديا فإن f_n فردية.
- دراسة تغيرات f_n
تقتصر الدراسة على $]0,+\infty[$ (لأن f_n زوجية أو فردية حسب n).
من أجل $x>0$ يكون $f_n'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$
من أجل كل $x>0$ يكون $f_n'(x)<0$
و منه f_n متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=+\infty$.
وإليك جدول تغيرات الدالة f_n

x	0	$+\infty$
إشارة $f_n'(x)$	‖	
تغيرات f_n	$+\infty$	0



بما أن صورة $]0,+\infty[$ بالدالة f_n هي $]0,+\infty[$
فإن الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.
المنحنى (γ_n) يقبل المستقيم $y=0$
مقاربا افقيا و يقبل المستقيم
ذا المعادلة $x=0$ مقاربا عموديا.

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي α و من أجل كل $x>0$ لدينا $x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$
و دراسة الدالة $x\mapsto x^\alpha$ على $]0,+\infty[$ يؤول إلى دراسة $x\mapsto e^{\alpha\ln(x)}$
و تسمى الدالة $x\mapsto x^\alpha$ دالة الأس.

تمرين تدريبي

x عدد حقيقي يختلف عن 1. احسب المجموع التالي $S=1+x+x^2+\ldots+x^n$

✓ الحل

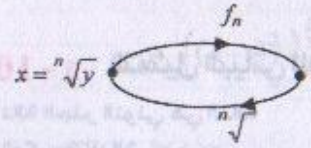
الأعداد $1, x, x^2, \ldots, x^n$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها x و حدها الأول 1 و عدد حدود S هي $n+1$
إذن $S=1\times\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

10 . دالة الجذر النوني

في هذه الفقرة n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.
لتكن f_n الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f_n(x)=x^n$
f_n تقابل من $]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$ إذن من أجل كل $y\in]0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد x بحيث $x^n=y$.

إذا كان $y>0$ فإن $y=\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n$ و بالتالي $x=y^{\frac{1}{n}}$
و إذا كان $y=0$ فإن $x=0$.

نسمي العدد الحقيقي الموجب x بالجذر النوني لـ y
و نرمز له بـ $\sqrt[n]{\ }$ و نكتب $x=\sqrt[n]{y}$.



إذن من أجل كل $x\geq 0$ و $y\geq 0$ لدينا
$y=x^n$ يكافئ $x=\sqrt[n]{y}$.

- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب y العدد الحقيقي الموجب x هي الدالة العكسية للدالة f_n.
- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تسمى دالة الجذر النوني.

1-10 تعريف

دالة الجذر النوني هي الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و المعرفة على المجال $[0,+\infty[$

ملاحظة

بما أن $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ و $x > 0$ فإن $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0} = 0$

إذن نستطيع أن نعرف الدالة $\sqrt[n]{\ }$ كما يلي لما $x > 0$ يكون $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0} = 0$

2-10 خواص الدالة $\sqrt[n]{\ }$

مبرهنة

دالة الجذر النوني قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \to \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

الإثبات :

من أجل كل $x > 0$ لدينا $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}Ln(x)}$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{n}Ln(x)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$$

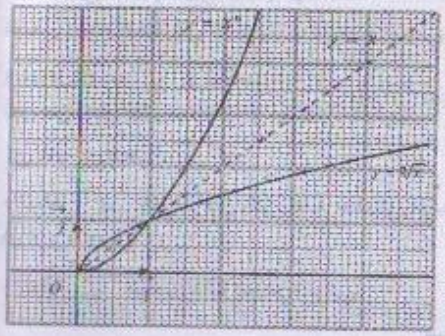
ملاحظة

الدالة $\sqrt[n]{\ }$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و منحناها البياني له مماس عمودي عند النقطة ذات الفاصلة صفر .

نتيجة

دالة الجذر النوني مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

3-10 التمثيل البياني للدالة $\sqrt[n]{\ }$



دالة الجذر النوني هي الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ و منحناهما البيانيان متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة : $y = x$.

تمرين تدريبي ❶

1) a عدد حقيقي موجب يختلف عن 1 برهن أن $\left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$

حيث p ، n عددان طبيعيان غير معدومين.

2) بسط العدد B حيث $B = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[5]{64} \sqrt{6}$.

✓ الحل

1) $\left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{p\,Ln(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{n}Ln(a)}\right)^p = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$$

2) $B = 54^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{2}} = \left(3^3 \times 2\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(2^6\right)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{61}{30}}$

تمرين تدريبي ❷

1) حل المعادلة $x^{\frac{4}{3}} = 2$ ، ب) حل المتراجحة $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2$

✓ الحل

1) $x^{\frac{4}{3}} = 2$ برفع الطرفين إلى القوة $\frac{3}{4}$ نجد $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ اي $x = 2^{\frac{3}{4}}$

2) $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2$ يكافئ $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \geq 2$ بالقلب نجد $(x-1)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2}$ و بما أن دالة الأس

متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ فإنه نستنتج $\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ اي

$x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ منه $x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1$.

حتى تكون المتراجحة لها معنى يجب أن يكون $x-1 > 0$ أي $x > 1$

إذن مجموعة الحلول هي $S = \left]1\ ,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right[$

11 ـ مقارنة بعض الدوال بجوار $(+\infty)$

الدوال $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1)$ ، $x \mapsto Ln\,x$ و $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و نهاية كل منها هي $(+\infty)$ و عليه من اجل قيم كبرى لـ x الأعداد x^n ، $Ln(x)$ ، e^x تكبر أكثر فأكثر و الهدف هو مقارنة ترتيب المقادير e^x ، x^n ، $Ln(x)$ من اجل قيم كبرى لـ x .

من اجل ذلك ندرس النهايات عند $(+\infty)$ للدوال $x \mapsto \frac{Ln(x)}{x^n}$ ، $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$

مبرهنة :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Ln\,x}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

الإثبات :

1) بوضع $X = x^n$ يكون $x = X^{\frac{1}{n}}$ و لما $x \to +\infty$ فإن $X \to +\infty$ و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Ln\,x}{x^n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{Ln\left(X^{\frac{1}{n}}\right)}{X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{Ln\,X}{X} = 0$$

2) لدينا $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n\,Ln(x)}} = e^{x - n\,Ln(x)}$ و عليه

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} e^{x - n\,Ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\left(1 - \frac{n\,Ln(x)}{x}\right)} = +\infty$$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Ln\,x}{x} = 0$

تفسير المبرهنة :

ـ بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ فإن العدد $\frac{e^x}{x^n}$ يصبح كبيرا جدا بجوار $(+\infty)$

و بصيغة أخرى من أجل قيم كبرى لـ x العدد x^n يصبح صغيرا جدا أمام e^x من أجل كل عدد طبيعي n .

ـ بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Ln(x)}{x^n} = 0$ فإن العدد $\frac{Ln(x)}{x^n}$ يصبح صغيرا جدا من أجل قيم كبرى لـ x .

و من أجل قيم كبرى لـ x فإن العدد x^n يصبح كبيرا جدا أمام $Ln(x)$.

نقول عندئذ من أجل قيم كبيرة بالقدر الكافي لـ x أن $e^x > x^n > Ln(x)$.

ملاحظة

المبرهنة تبقى صحيحة في حالة n عدد حقيقي موجب.

نتيجة

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^n Ln\,x = 0$ ، 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$ من أجل كل $n > 0$ ، 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) e^x = 0$ مع $p(x)$ كثير حدود

الإثبات

1) بوضع $X = \frac{1}{x}$ نجد $\lim\limits_{x \to 0} x^n\,Ln\,x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{Ln\,X}{X^n} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$

تمرين تدريبي ❶

1) ادرس نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x) = \frac{e^x}{Ln\,x}$ ، ب) $f(x) = \frac{e^x}{(Ln\,x)^5}$ ، جـ) $f(x) = \frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}}$

2) بين انه من أجل كل $x > 0$ يكون $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\,x}\right)^2$

ثم استنتج نهاية $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2}$ عند $(+\infty)$

✓ الحل

1) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{Ln\,x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(Ln\,x)^5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} \times \frac{1}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)^5} = +\infty$

جـ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x x^{\frac{2}{3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\,e^x = +\infty$

2) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{(Ln\,x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\,x}\right)^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{6\,Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{36}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=+\infty$$

تمرين تدريبي ❷

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x\rangle 0$ يكون $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}\rangle\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$

2) استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ حيث $f(x)=\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}$

✓ الحل

1) من أجل كل $x\rangle 0$ يكون $5x+3\rangle x$ و بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإنه ينتج $e^{5x+3}\rangle e^x$ و بالقسمة على $x^{\frac{5}{2}}$ نجد $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}\rangle\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(32\frac{e^{2x}}{(2x)^5}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(32\frac{e^X}{X^5}\right)^{\frac{1}{2}}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^X}{X^n}=+\infty$ حيث $X=2x$.

بما أن $f(x)\geq\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تطبيقات نموذجية

تطبيق ❶ تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى:

أ) $Ln(1-x)$ ، ب) $Ln(x^3)$ ، جـ) $\frac{1}{x}Ln(1+x)$

د) $Ln(2x^2-4)$ ، هـ) $Ln(2x-4)(3-x)$

و) $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ ، ن) $Ln(x^2+x+1)$

✓ الحل

أ) حتى يكون للعبارة $Ln(1-x)$ معنى يجب أن يكون $1-x\rangle 0$ أي $x\langle 1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty,1[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln(x^3)$ معنى يجب أن يكون $x^3\rangle 0$ أي $x\rangle 0$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]0,+\infty[$

جـ) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x}Ln(1+x)$ معنى يجب أن يكون $1+x\rangle 0$ و $x\neq 0$

أي $x\rangle -1$ و $x\neq 0$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

د) حتى يكون للعبارة $Ln(2x^2-4)$ معنى يجب أن يكون $2x^2-4\rangle 0$

اي $x\in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

هـ) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)(3-x)$ معنى يجب أن يكون $(2x-4)(3-x)\rangle 0$

اي $x\in]2,3[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]2,3[$

و) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ معنى يجب ان يكون $3-x\rangle 0$ و $2x-4\rangle 0$

أي $x\langle 3$ و $x\rangle 2$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]2,3[$

ن) حتى يكون للعبارة $Ln(x^2+x+1)$ معنى يجب أن يكون $x^2+x+1\rangle 0$

مميز x^2+x+1 هو $\Delta=-3$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^2+x+1\rangle 0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}$.

تطبيق ❷ تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى :

أ) $Ln(x^2+9x)$ ، ب) $Ln(|x^2-3x+2|)$

ج) $Ln(|x-1|)-Ln(|x+1|)$ ، د) $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

هـ) $Ln(\sqrt{x-1}-2)$ ، و) $Ln(x|x|-1)$

ن) $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ ، ي) $\frac{1}{x\,Ln\,x}$

✓ الحل

أ) حتى يكون للعبارة $Ln(x^2+9x)$ معنى يجب أن يكون $x^2+9x>0$

$x^2+9x>0$ يكافئ $x\in\,]-\infty,-9[\cup]0,+\infty[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]-\infty,-9[\cup]0,+\infty[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln(|x^2-3x+2|)$ معنى يجب أن يكون $|x^2-3x+2|>0$

$|x^2-3x+2|>0$ يكافئ $x^2-3x+2\neq 0$ يكافئ $(x\neq 1)$ و $(x\neq 2)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,2\}$

ج) حتى يكون للعبارة $Ln(|x-1|)-Ln(|x+1|)$ معنى يجب ان يكون $|x-1|>0$ و $|x+1|>0$

أي $x-1\neq 0$ و $x+1\neq 0$

$(x-1\neq 0$ و $x+1\neq 0)$ يكافئ $(x\neq 1)$ و $(x\neq -1)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

د) حتى يكون للعبارة $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$ معنى يجب أن يكون $\frac{x-2}{3-x}>0$ و $3-x\neq 0$

$\frac{x-2}{3-x}>0$ إذا و فقط إذا كان $x\in\,]2,3[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]2,3[$

هـ) حتى يكون لـ $Ln(\sqrt{x-1}-2)$ معنى يجب أن يكون $x-1\geq 0$ و $\sqrt{x-1}-2>0$

$x-1\geq 0$ يكافئ $x\geq 1$

$\sqrt{x-1}-2>0$ يكافئ $\sqrt{x-1}>2$ يكافئ $x-1>4$ يكافئ $x>5$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]5,+\infty[$

و) حتى تكون للعبارة $Ln(x|x|-1)$ معنى يجب أن يكون $x|x|-1>0$ (I)

حل المتراجحة (I) :

- حالة $x\geq 0$:

المتراجحة (I) تكافئ $x^2-1>0$ تكافئ $x>1$

ومنه مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $]1,+\infty[$

- حالة $x\leq 0$:

المتراجحة (I) تكافئ $-x^2-1>0$ تكافئ $x^2+1<0$

المتباينة $x^2+1<0$ خاطئة ومنه مجموعة حلول المتراجحة $x|x|-1>0$ هي ϕ

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\phi\cup]1,+\infty[=]1,+\infty[$

ن) حتى يكون للعبارة $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ معنى يجب ان يكون $x+3\geq 0$ و $x+1>0$

و $Ln(x+1)\neq 0$ و هذا يعني $x\geq -3$ و $x>-1$ و $x+1\neq 1$

أي $x\geq -3$ و $x\geq -1$ و $x\neq 0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

ي) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x\,Ln(x)}$ معنى يجب أن يكون $x>0$ و $Ln(x)\neq 0$

أي $x>0$ و $x\neq 1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$

تطبيق ❸ تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}Ln\,x$ مع a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، $A(1,0)$ نقطة من (C_f) ، المماس لـ (C_f) في A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+2$

1) احسب من أجل كل x من $]0,+\infty[$ عبارة $f'(x)$

2) أ) بين ان $f'(1)=3$ ، ثم استنتج ان $a+1=3$

ب) بين ان $a+b=0$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=a+\left(\frac{-1}{x^2}\right)Ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=a+\frac{1}{x^2}[-Ln(x)+1]$$

2) أ) بما ان المماس للمنحنى (C_f) عند A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+1$

فإن ميله هو 3 و عليه فإن $f'(1)=3$

لدينا $f'(1)=a+[-Ln(1)+1]=a+1$ ومنه نستنتج ان $a+1=3$

ب) بما أن $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f) فإن $f(1)=0$

$f(1)=0$ يكافئ $a+b=0$

لدينا $\begin{cases}a+1=3\\a+b=0\end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$ إذن $f(x)=2x-2+\frac{1}{x}Ln(x)$

تطبيق 4 تعيين اتجاه تغير دالة

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3}{x}+Ln\,x$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$

2) شكل جدول تغيرات f ثم استنتج أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)>0$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-3+x}{x^2}$

2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-3$ لأن المقام موجب تماما و عليه :

إذا كان $x=3$ فإن $f'(3)=0$

إذا كان $x<3$ فإن $f'(x)<0$

إذا كان $0<x<3$ فإن $f'(x)<0$

x	0		3		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	‖	↘	$f(3)$	↗	

لدينا $f(3)=1+Ln\,3$

و بما أن $Ln\,3>0$ فإن $f(3)>0$

نستنتج من جدول تغيرات f أنه من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)\geq f(3)$ أي $f(x)>0$

تطبيق 5 حساب المشتق

f ، g ، h ثلاث دوال معرفة على $]0,+\infty[$ بـ :

$f(x)=x\,Ln\,x$ ، $g(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $h(x)=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- عين $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=Ln\,x+\frac{1}{x}\times x$ أي $f'(x)=1+Ln\,x$

ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1-Ln\,x}{x^2}$

ج) الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

هما $x\xrightarrow{h_1}\frac{x}{x+1}$ و $x\xrightarrow{h_2}Ln\,x$ مع $(h=h_2\circ h_1)$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $h'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{1}{x(x+1)}$

تطبيق 6 تبسيط أعداد باستعمال لوغاريتم الجداء

بسط الأعداد التالية :

$Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ، $Ln\left(\frac{1}{5}\right)$ ، $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)$

$Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)$ ، $Ln(567)-Ln(72)-Ln\frac{7}{8}+Ln\left(\frac{1}{27}\right)$

$Ln\,\sqrt{5+\sqrt{5+2}}+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ ، $Ln\sqrt{135}+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln\sqrt{27}$

✓ الحل

- $Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)=Ln\left(4\times\frac{1}{4}\right)=Ln(1)=0$

حسب قاعدة لوغاريتم مقلوب عدد يكون $Ln\left(\frac{1}{5}\right)=-Ln(5)$

- $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)=Ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=Ln(5-4)=Ln(1)=0$

- $Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)=Ln\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)$

$=Ln\left(\frac{17-16}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=Ln\left(\frac{1}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=-2\,Ln(\sqrt{17}-4)$

- $Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)=Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

$=Ln\left(\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\right)=Ln(\sqrt{5-4})=Ln\sqrt{1}=0$

- $Ln\,567-Ln\,72-Ln\left(\frac{7}{8}\right)+Ln\left(\frac{1}{27}\right)=Ln(3^4\times7)-Ln(2^3\times3^2)-Ln\frac{7}{8}-Ln(27)$

$=4\,Ln(3)+Ln(7)-3\,Ln(2)-2\,Ln(3)-Ln(7)+3\,Ln(2)-3\,Ln(3)$

$$= -Ln(3)+Ln(7) = Ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$Ln\left(\sqrt{135}\right)+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln\left(\sqrt{27}\right)=\frac{1}{2}Ln135+\frac{1}{2}Ln75-Ln15-\frac{1}{2}Ln27$$

$$= \frac{1}{2}(3Ln3+Ln5)+\frac{1}{2}(Ln3+2Ln5)-Ln3-Ln5-\frac{3}{2}Ln3$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}\right)Ln3+\left(\frac{1}{2}+1-1\right)Ln5$$

$$=-\frac{1}{2}Ln3+\frac{1}{2}Ln5 = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{5}{3}\right)=Ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

تطبيق 7 إثبات صحة مساواة

برهن انه من اجل كل $x\rangle 0$ يكون لدينا :

ا) $Ln(x+2)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ب) $Ln\left(2+x^2\right)=2Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

جـ) $Ln\left(x^2+x+1\right)=2Ln\,x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)$

✓ الحل

ا) $Ln(x+2)=Ln(x)\left(1+\frac{2}{x}\right) = Ln\,x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

ب) $Ln\left(2+x^2\right)=Ln\left(x^2\right)\left(\frac{2}{x^2}+1\right) = Ln\,x^2+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

$$=2Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

جـ) $Ln\left(x^2+x+1\right)=Ln\left(x^2\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=Ln\left(x^2\right)+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=2Ln\,x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=Ln\left(\frac{x+1}{1+\frac{1}{x}}\right)$

تطبيق 8 تعيين مجموعة تكون فيها مساواة صحيحة

عين مجموعة الأعداد x التي من أجلها تكون المساواة صحيحة في كل حالة من الحالات التالية :

ا) $Ln\left(x^2-1\right)=Ln(x+1)+Ln(x-1)$ ب) $Ln(2+x)=Ln\,x+Ln\left(\frac{2}{x}+1\right)$

جـ) $Ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=Ln(x+1)-Ln(x-2)$ د) $Ln\left(x^2\right)=2Ln(-x)$

✓ الحل

ا) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$2+x\rangle 0$ و $x\rangle 0$ و $\frac{2}{x}+1\rangle 0$

اي $x\rangle -2$ و $x\rangle 0$ و $x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]0,+\infty[$

ب) حتى تكون المساواة صحيحة يجب ان يكون $x^2-1\rangle 0$ و $x+1\rangle 0$ و $x-1\rangle 0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ و $x\rangle -1$ و $x\rangle 1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]1,+\infty[$

جـ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$\frac{x+1}{x-2}\rangle 0$ و $x-2\neq 0$ و $x+1\rangle 0$ و $x-2\rangle 0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ و $x\rangle -1$ و $x\rangle 2$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]2,+\infty[$

د) حتى تكون المساواة صحيحة يجب ان يكون $x^2\rangle 0$ و $-x\rangle 0$

اي $x\in\mathbb{R}^*$ و $x\in]-\infty,0[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]-\infty,0[$.

تطبيق 9 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

ا) $Ln(3x+2)=0$ ب) $Ln(3x+2)=1$ جـ) $Ln(3x+2)=-1$

د) $Ln(3x-2)=2$ هـ) $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6Ln2$

و) $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln3$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2>0$ أي $x>-\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]-\frac{2}{3},+\infty[$

$Ln(3x+2)=0$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(1)$

ومنه نستنتج $3x+2=1$ أي $x=\frac{-1}{3}$

بما أن $\frac{-1}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة $Ln(3x+2)=0$ هي $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2>0$ أي $x>-\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (المجموعة المرجعية) هي $D=\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$

$Ln(3x+2)=1$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(e)$

ومنه ينتج $3x+2=e$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e-2}{3}$.

بما أن $\frac{e-2}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{e-2}{3}\right\}$

ج) المجموعة المرجعية هي $D=\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$

المساواة $Ln(3x+2)=-1$ تكتب $Ln(3x+2)=Ln\left(\frac{1}{e}\right)$

ومنه ينتج $3x+2=\frac{1}{e}$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$.

بما أن $\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$ ينتمي إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}\right\}$

د) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x-2>0$ أي $x>\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$.

المساواة $Ln(3x-2)=2$ تكتب $Ln(3x-2)=Ln(e^2)$

ومنه نستنتج $3x-2=e^2$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e^2+2}{3}$

بما أن $\frac{e^2+2}{3}>\frac{2}{3}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{e^2+2}{3}\right\}$.

هـ) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$x-2>0$ و $x-32>0$ أي $x>2$ و $x>32$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]32,+\infty[$

المساواة $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6Ln(2)$ تكتب $Ln(x-2)(x-32)=Ln(2^6)$

أي $(x-2)(x-32)=64$ بالتبسيط نجد $x^2-34x=0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=0$ أو $x=34$

بما أن 0 لا ينتمي إلى D فهو مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{34\}$

و) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$-2x+5>0$ و $4x-5>0$ أي $x<\frac{5}{2}$ و $x>\frac{5}{4}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=\left]\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right[$.

المساواة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln(3)$ تكتب $Ln(-2x+5)(4x-5)=Ln\left(\frac{1}{3}\right)$

و منه ينتج $(-2x+5)(4x-5)=\frac{1}{3}$ بالتبسيط نجد $-24x^2+90x-76=0$

مميز المعادلة $-24x^2+90x-76=0$ هو $\Delta=804$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلان $x_1=\frac{-90+\sqrt{804}}{-48}$ و $x_2=\frac{-90-\sqrt{804}}{-48}$

x_1 و x_2 ينتميان إلى D

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln3$ هي $S=\{x_1\ ,\ x_2\}$

تطبيق 10 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln\,x=Ln(x^2+4x)$ ، ب) $2Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$

جـ) $Ln(x+2)+Ln(x+1)=Ln(x+10)$

د) $Ln(\sqrt{3x-1})+Ln(\sqrt{x-1})=Ln(x-2)$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $x>0$ و $x^2+4x>0$

أي $x>0$ و $x\in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0,+\infty[$.

المساواة $Ln(x)=Ln(x^2+4x)$ تكتب $x=x^2+4x$ اي $x^2+3x=0$

$x^2+3x=0$ تكافئ $x=0$ او $x=-3$

بما أن 0 و -3 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة $Ln\,x=Ln(x^2+4x)$ ليس لها حلول.

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$x+1>0$ و $x+5>0$ و $2x+2>0$ اي $x>-1$ و $x>-5$

ومنه مجموعة تعويف المعادلة هي $D=]-1,+\infty[$

المساواة $2Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$ تكتب $Ln(x+1)^2=Ln(x+5)(2x+2)$

ومنه ينتج $x^2+10x+9=0$ (1)

بما ان مميز المعادلة (1) هو $\Delta=64$ فإن للمعادلة حلان هما $x_1=-1$ و $x_2=-9$

بما ان x_1 و x_2 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة (ب) ليس لها حلول.

جـ) حتى تكون للمساواة (جـ) لها معنى يجب ان يكون :

$x+2>0$ و $x+1>0$ و $x+10>0$

اي x ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ ومنه $D=]-1,+\infty[$.

المساواة $Ln(x+10)=Ln(x+2)+Ln(x+1)$ تكتب $Ln(x+2)(x+1)=Ln(x+10)$

و منه ينتج $(x+2)(x+1)=x+10$ بالتبسيط نجد $x^2+2x-8=0$... (2)

مميز المعادلة (2) هو $\Delta=36$

ومنه المعادلة (2) لها حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-4$

بما ان $2\in D$ و $-4\notin D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{2\}$.

د) حتى تكون للمساواة (د) لها معنى يجب أن يكون :

$3x-1>0$ و $x-1>0$ و $x-2>0$ اي $x>\frac{1}{3}$ و $x>1$ و $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D=]2,+\infty[$.

المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln\left(\sqrt{3x-1}\times\sqrt{x-1}\right)=Ln(x-2)$

اي $Ln\sqrt{(3x-1)(x-1)}=Ln(x-2)$ ومنه ينتج $\sqrt{(3x-1)(x-1)}=x-2$

بتربيع الطرفين نجد $(3x-1)(x-1)=x^2-4x+4$ و بالتبسيط نجد $2x^2-3=0$

حلول المعادلة $2x^2-3=0$ هما $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

بما ان $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا ينتميان إلى D

فإن مجموعة حلول المعادلة (د) هي ϕ .

تطبيق 11 حل متراجحات

- حل المتراجحات التالية :

ا) $Ln(2x-4)\geq 0$ ، ب) $Ln(2x-4)<1$ ، جـ) $Ln(x-4)\geq Ln\,2$

د) $Ln\left(\frac{1}{x}\right)<3$ ، هـ) $(Ln\,x)^2\leq 36$

✓ الحل

ا) حتى تكون للمتراجحة (ا) معنى يجب ان يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ا) هي $D=]2,+\infty[$.

المتراجحة $Ln(2x-4)\geq 0$ تكتب $Ln(2x-4)\geq Ln1$ ومنه ينتج $2x-4\geq 1$ اي $x\geq\frac{5}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ا) هي $S=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[\cap D=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

ب) حتى تكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]2,+\infty[$

المتراجحة $Ln(2x-4)<1$ تكافئ $2x-4<e$ اي $x<\frac{e+4}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left]-\infty,\frac{e+4}{2}\right[\cap\,]2,+\infty[=\left]2,\frac{e+4}{2}\right[$

جـ) حتى تكون للمتراجحة (جـ) معنى يجب أن يكون $x-4>0$ اي $x>4$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D=]4,+\infty[$

المتراجحة $Ln(x-4)\geq Ln(2)$ تكافئ $x-4\geq 2$ اي $x\geq 6$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=[6,+\infty[\cap\,]4,+\infty[=[6,+\infty[$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $\frac{1}{x}>0$ و $x>0$ اي $x\in]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D=]0,+\infty[$.

المتراجحة $Ln\left(\frac{1}{x}\right)<3$ تكافئ $\frac{1}{x}<e^3$ ومنه ينتج $x>e^3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=]0,e^3[=]0,+\infty[\cap\,]-\infty,e^3[$

هـ) حتى يكون للمتراجحة (هـ) معنى يجب أن يكون $x>0$

و منه مجموعة تعريف المتراجحة (هـ) هي $D=]0,+\infty[$

المتراجحة $(Ln\,x)^2\leq 36$ تكافئ $-6\leq Ln\,x\leq 6$ و هذه الأخيرة تكافئ :

$Ln\,e^{-6}\leq Ln\,x\leq Ln\,e^6$ و بما أن الدالة Ln متزايدة تماما فإنه ينتج $e^{-6}<x<e^6$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=]0,+\infty[\cap\,]e^{-6},e^6[=]e^{-6},e^6[$

تطبيق 12 حل متراجحات

حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ ، ب) $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$

جـ) $Ln(3x^2-x) \leq Lnx+Ln2$ ، د) $Ln(4-x)-Ln3+Lnx \geq 0$

✓ الحل

أ) حتى يكون للمتراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $3x^2+5x>0$ و $6x+10>0$

أي $x>\frac{-5}{3}$ و $x\in]-\infty,\frac{-5}{3}[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D=]0,+\infty[$

المتراجحة $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ تكافئ $3x^2+5x \geq 6x+10$

أي $3x^2-x-10 \geq 0$ (1)

مميز كثير الحدود $(3x^2-x-10)$ هو $\Delta=121$

ومنه للمعادلة $3x^2-x-10=0$ حلان هما $x_1=2$ و $x_2=\frac{-5}{3}$

من الجدول المجاور نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2-x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left(]-\infty,\frac{-5}{3}[\cup]2,+\infty[\right)\cap]0,+\infty[$$

ب) حتى يكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون :

$x+1>0$ و $3x+1>0$ أي $x>-1$ و $x>\frac{-1}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D=]-\frac{1}{3},+\infty[$

المتراجحة $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$ تكافئ $Ln(x+1)^3 > Ln(3x+1)$

ومنه ينتج $(x+1)^3 > 3x+1$ بالتبسيط نجد $x^2(x+3)>0$ (2)

ومجموعة حلول المتراجحة (2) هي $]-3,0[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=D\cap(]-3,0[\cup]0,+\infty[)=]-\frac{1}{3},0[\cup]0,+\infty[$

جـ) حتى يكون للمتراجحة (جـ) معنى يجب أن يكون $3x^2-x>0$ و $x>0$ أي :

$x\in]-\infty,0[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$ و $x>0$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (جـ) هي $D=]\frac{1}{3},+\infty[$

المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $Ln(3x^2-x) \leq Ln(2x)$ ومنه ينتج $3x^2-x \leq 2x$

بعد التبسيط نجد $3x(x-1) \leq 0$

$3x(x-1) \leq 0$ يكافئ $x\in[0,1]$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=D\cap[0,1]=]\frac{1}{3},1]$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $4-x>0$ و $x>0$

أي $x<4$ و $x>0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D=]0,4[$

المتراجحة (د) تكتب على الشكل $Ln\frac{(4-x)(x)}{3} \geq Ln(1)$ ومنه ينتج $\frac{(4-x)(x)}{3} \geq 1$

بعد التبسيط نجد $-x^2+4x-3 \geq 0$ (2)

مميز $(-x^2+4x-3)$ هو 4 ومنه للمعادلة $-x^2+4x-3=0$ حلان هما 1 و 3

$-x^2+4x-3 \geq 0$ إذا وفقط إذا كان $x\in[1,3]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=D\cap[1,3]=[1.3]$

تطبيق 13 حل معادلات تشمل القيمة المطلقة

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x-1|+Ln|x+1|=0$ ، ب) $Ln(|x-1|)+Ln(x+5)=3Ln(2)$

جـ) $Ln(|2x+5|)+Ln(|x|)=2Ln(|x+1|)$

د) $Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)+1=0$

✓ الحل

أ) حتى يكون للمعادلة (أ) معنى يجب أن يكون $|x-1|>0$ و $|x+1|>0$

أي $x\neq 1$ و $x\neq -1$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $Ln(|x-1||x+1|)=Ln(1)$ ومنه ينتج $|x^2-1|=1$... (1)

$|x^2-1|=1$ يكافئ $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ أو $x=0$

ومنه حلول المعادلة (1) هي 0 ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$.

بما أن 0 ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ ينتميان إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة (أ) هي :

$S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2},0\}$.

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $D=]-5,1[\cup]1,+\infty[$.

المعادلة (ب) تكتب $Ln|x-1|(x+5)=Ln(8)$ منه ينتج $|x-1|(x+5)=8$... (2)

- إذا كان $-5<x<1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x+3=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $x=-1$ و $x=-3$

وبما أن -1 و -3 ينتميان إلى $]-5,1[$ فهما مقبولان.

- إذا كان $x>1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x-13=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}$ ، $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$

$\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ مرفوض لأنه ليس أكبر من الواحد.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\left\{\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}\ ,\ -1\ ,\ -3\right\}$

ج) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $|2x+5|>0$ و $|x|>0$ و $|x+1|>0$

أي $x\neq\frac{-5}{2}$ و $x\neq0$ و $x\neq-1$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة (ج) هي $D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2}\ ,\ 0\ ,\ -1\right\}$

المعادلة (ج) تكتب على الشكل $Ln(|2x+5||x|)=Ln(|x+1|^2)$

و منه ينتج $|x(2x+5)|=(x+1)^2$... (3)

- إذا كان $x\in\left]\frac{-5}{2},-1\right[\cup]-1,0[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $x_1=\frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ ، $x_2=\frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

x_1 و x_2 ينتميان إلى $\left]\frac{-5}{2},0\right[-\{-1\}$ فهما مقبولان

- إذا كان $x\in\left]-\infty,\frac{-5}{2}\right[\cup]0,+\infty[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل

$x^2+3x-1=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $x_3=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ، $x_4=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

x_3 و x_4 مقبولان لأنهما ينتميان إلى $]-\infty,\frac{-5}{2}[\cup]0,+\infty[$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S=\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\}$

د) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>0$ و $x-1\neq0$

أي $x\neq2-$ و $x\neq1$ ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D=\mathbb{R}-\{1,-2\}$

المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)=Ln\,e^{-1}$ ومنه ينتج (4) ... $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=e^{-1}$

- إذا كان $x\in]-2,1[$ فإن المعادلة (4) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1}=-e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x=\frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}$ و هذا الحل مقبول لأنه ينتمي إلى $]-2,1[$

- إذا كان $x\in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$ فإن المعادلة (4) تكتب $\frac{x+2}{x-1}=e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x=\frac{2e+1}{1-e}$ و هذا حل مقبول لأنه ينتمي إلى $]-\infty,-2[$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S=\left\{\frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}\ ,\ \frac{2e+1}{1-e}\right\}$

تطبيق 14 حل متراجحات تشمل القيمة المطلقة

حل المتراجحات التالية :

ا) $Ln(|x-1|)+Ln|x+1|\leq0$ ب) $Ln|x+2|-Ln|x-1|+1\rangle0$

ج) $Ln(|2x+5|)+Ln(|x|)\geq2\,Ln(|x+1|)$

✓ الحل

ا) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ا) هي $D=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$ المتراجحة (ا) تكتب على الشكل:

$Ln(|x-1||x+1|)\leq Ln(1)$ ومنه ينتج $|(x-1)(x+1)|\leq1$... (1)

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2\geq0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1=]-1,1[$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2\leq2$

ومجموعة حلولها هي $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_2=]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ا) هي $S=S_1\cup S_2$

ب) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ب) هي $D=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

من أجل كل x من D المتراجحة (ب) تكتب على الشكل ،

$Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)\geq Ln(e^{-1})$ ومنه ينتج (2) ... $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\geq e^{-1}$

- إذا كان $x\in]-2,1[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $-\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x \geq \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S_1 = \left[\frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}, 1\right[$

- إذا كان $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)} \geq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_2 = \left]-\infty, \frac{2e+1}{1-e}\right] \cup]1, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{2e+1}{1-e}$	-2	1	$+\infty$
$\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = S_1 \cup S_2$

ج) المجموعة المرجعية للمتراجحة (جـ) هي $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{-5}{2}, 0, -1\right\}$.

من أجل كل x من D المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل:

$$Ln(|2x+5|)|x| \geq Ln(|x+2|)^2$$

ومنه ينتج $|x(2x+5)| \geq (x+1)^2$ (3)

- إذا كان $x \in \left]\frac{-5}{2}, 0\right[- \{-1\}$ فإن (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1 \leq 0$ و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_1 = [x_2, x_1] - \{-1\}$ مع $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

- إذا كان $x \in \left]-\infty, \frac{-5}{2}\right[\cup]0, +\infty[$ فإن (3) تكتب على الشكل $x^2+3x-1 \geq 0$

و مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_2 =]-\infty, x_4] \cup [x_3, +\infty[$

حيث $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = S_1 \cup S_2$

تطبيق 15 — حل معادلات و متراجحات

1) حل المعادلة $x^2+4x-5=0$ (1)

2) لتكن $g(x) = (Ln x)^2 + Ln x - 5$ حيث $x > 0$

بوضع $X = Ln(x)$ ، حل المعادلة $g(x) = 0$... (2)

3) حل المتراجحة $g(x) \geq 0$

✓ الحل

1) مميز المعادلة (1) هو $\Delta = 36$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -5$

2) $g(x) = 0$ يكافئ $X^2+4X-5=0$ يكافئ $(X=1)$ أو $(X=-5)$

$X = 1$ يكافئ $Ln x = Ln e$ يكافئ $x = e$

$X = -5$ يكافئ $Ln x = Ln e^{-5}$ يكافئ $x = e^{-5}$

و منه مجموعة حلول المعادلة $g(x) = 0$ هي $S = \{e, e^{-5}\}$

3) $g(x) = X^2+4X-5 = (X-1)(X+5) = (Ln(x)-1)(Ln(x)+5)$

x	$-\infty$	e^{-5}	e	$+\infty$
$Ln(x)-1$	$-$	$+$	0	$-$
$Ln(x)+5$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0

$g(x) \geq 0$ يكافئ $x \in]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$

و منه مجموعة حلول المتراجحة $g(x) \geq 0$ هي: $]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$.

تطبيق 16 — حل معادلات و متراجحات

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع $p(x) = 2x^3+3x^2+x-6$

1) أ) تحقق أن $p(1) = 0$

ب) استنتج أنه نستطيع كتابة $p(x) = (x-1)\varphi(x)$

و هذا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ مع $\varphi(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

جـ) حل المتراجحة $p(x) \leq 0$

2) استعمل النتائج السابقة لحل المتراجحة

$2Ln x + Ln(2x+3) \leq Ln(6-x)$ (1)

✓ الحل

1) أ) لدينا $p(1) = 2\times 1^3+3\times 1^2+1-6 = 6-6 = 0$

ب) بما أن 1 جذر لـ $p(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $\varphi(x)$ درجته 2

بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $p(x) = (x-1)\varphi(x)$ و $\varphi(x) = ax^2+bx+c$

بما أن معامل x^3 في $p(x)$ هو 2 فإن $a = 2$

بعد نشر $(x-1)\varphi(x)$ و مطابقته مع $p(x)$ نجد $b = 5$ و $c = 6$

إذن $p(x) = (x-1)(2x^2+5x+6)$

ج) نحل المتراجحة $p(x) \leq 0$ نعين إشارة $p(x)$

$p(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(2x^2+5x+6=0)$

مميز المعادلة $2x^2+5x+6=0$ يساوي -23

ومنه المعادلة $2x^2+5x+6=0$ ليس لها حلول و إشارة $(2x^2+5x+6)$ موجبة تماما.

$p(x) \leq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \leq 1$

و منه مجموعة حلول المتراجحة $p(x) \leq 0$ هي $S=]-\infty\ ,\ 1]$

2) مجموعة تعريف المتراجحة (I) هي $D=]0\ ,\ 6[$

من أجل كل x من D المتراجحة (I) تكتب على الشكل:

$Ln(x^2)(2x+3) \leq Ln(6-x)$ و منه ينتج $2x^3+3x^2+x-6 \leq 0$ (II)

مجموعة حلول المتراجحة (II) هي $]-\infty\ ,1]$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة (I) هي:

$S'=]-\infty\ ,\ 1] \cap]0\ ,\ 6[=]0\ ,\ 1]$

تطبيق 17 حل جملة معادلات

1) حل الجملة (I) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ x-7y=-5 \end{cases}$

2) استنتج حل الجملة (II) ... $\begin{cases} 3Ln\,x+5Ln\,y=11 \\ Ln\,x-7Ln\,y=-5 \end{cases}$

✓ الحل

1) $\begin{cases} 3x+5y=11 \ \ldots (1) \\ x-7y=-5 \ \ldots (2) \end{cases}$ بضرب (2) في -3 ثم نجمعها مع (1) نجد $26y=26$

ومنه $y=1$ و بتعويض قيمة y أي (1) نجد $x=2$

إذن مجموعة حلول الجملة (I) هي $S=\{(2,1)\}$

2) مجموعة تعريف الجملة (II) هي مجموعة الثنائيات (x,y) بحيث $x>0$ و $y>0$

بوضع $X=Ln\,x$ و $Y=Ln\,y$ الجملة (II) تصبح كما يلي $\begin{cases} 3X+5Y=11 \\ X-7Y=-5 \end{cases}$

من السؤال الأول نجد $X=2$ و $Y=1$

$X=2$ يكافئ $Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

$Y=1$ يكافئ $Ln\,y=1$ يكافئ $y=e$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S_2=\{(e^2\ ,\ e)\}$

تطبيق 18 حل جملة معادلتين

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية (I) $\begin{cases} xy=4 \\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2 \end{cases}$

2) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية :

(II) $\begin{cases} x+y=19 \\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln\,15 \end{cases}$

✓ الحل

1) مجموعة التعريف الجملة (I) هي مجموعة الثنائيات (x,y) بحيث $x>0$ و $y>0$.

(I) ... $\begin{cases} xy=4 \ \ldots (1) \\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2 \ \ldots (2) \end{cases}$

من (1) نجد $y=\frac{4}{x}$ نعوضه في (2) نجد $(Ln\,x)^2+\left(Ln\frac{4}{x}\right)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2$

بعد التبسيط نجد (*) $2(Ln\,x)^2-(4\,Ln\,2)\times(Ln\,x)+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$

بوضع $Ln(x)=X$ في (*) نجد (**) ... $2X^2-(4\,Ln\,2)X+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$

مميز المعادلة (**) هو $\Delta=(2\,Ln\,2)^2$

إذن المعادلة (**) لها حلان هما $X_1=\frac{3}{2}\,Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right)$ و $X_2=\frac{1}{2}Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

$Ln\,x=X_1$ يكافئ $x=e^{X_1}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

$Ln\,x=X_2$ يكافئ $x=e^{X_2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=2\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

و منه مجموعة حلول الجملة (I) هي $S=\{(\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}),(2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})\}$

2) (II) $\begin{cases} x+y=19 \ \ldots (3) \\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln\,15 \ \ldots (4) \end{cases}$

مجموعة تعريف الجملة (II) هي $D=(\mathbb{R}_+^*)^2$

من (3) نجد $y=19-x$ نعوض y في (4) نجد $Ln\,x+Ln(19-x)=Ln\,4+Ln\,15$

وحسب قواعد جداء اللوغاريتمات نجد $Ln(-x^2+19x)=Ln\,60$

ومنه ينتج $-x^2+19x-60=0$ (α)

مميز المعادلة (α) هو $\Delta=121$ ومنه المعادلة (α) لها حلان هما $x_1=4$ ، $x_2=15$

لما $x=4$ فإن $y=19-4=15$ ولما $x=15$ فإن $y=19-15=4$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S=\{(4,15),(15,4)\}$

تطبيق 19 تحدب الدالة Ln

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و بحيث من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$ نقول عن f أنها محدبة .

1) أ) بين أنه من أجل كل $a>0$ و $b>0$ يكون $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

ب) استنتج أنه من أجل كل $a>0$ و $b>0$ يكون

$$Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$$

2) أنشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة $x\mapsto Ln\,x$ معينا عليه نقطتين A و B فاصلتيهما a و b على التوالي.

ما هي وضعية منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى (C_f) ؟

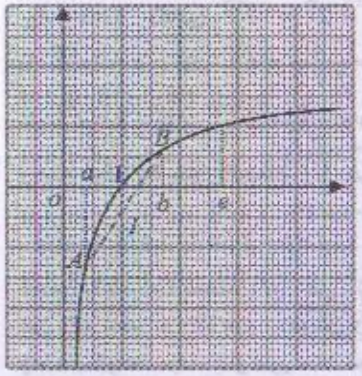
✓ الحل

1) أ) نعلم أن $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ و عليه يكون $a^2+b^2-2ab\geq 0$

بإضافة $4ab$ إلى طرفي المتباينة نجد $a^2+b^2+2ab\geq 4ab$

و بقسمة الطرفين على 4 نجد $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\geq ab$ ،

و بجذر الطرفين نجد $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}{2}\geq\sqrt{ab}$



أي : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

ب) لدينا $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ و بما أن الدالة Ln متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq Ln\sqrt{ab}$ و لكن ،

$$Ln\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}Ln(ab)=\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$$

إذن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$

2) إحداثيتا النقطة I منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{a+b}{2}\,,\,\frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}\right)$

بما أن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}$

فإن النقطة $M\left(\frac{a+b}{2}\,,\,Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ من (C_f) تقع فوق النقطة I

وهذا يعني أن الدالة Ln محدبة.

تطبيق 20 حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f في المكان المعطى.

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $x=0$ ب) $f(x)=\frac{x+Ln\,x}{x}$ ، $x=0$ ، $x=0$

جـ) $f(x)=\frac{1}{x}-Ln\,x$ ، $x=0$ د) $f(x)=\frac{x}{Ln\,x}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x+1}$ عند $(+\infty)$ و) $f(x)=\frac{Ln(x+1)}{x}$ عند $+\infty$

ن) $f(x)=2x+x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\times Ln\,x=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}Ln\,x=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{Ln\,x}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln\,x}{x}=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}-Ln\,x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{Ln\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)}=+\infty$

هـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{x}{x+1}=0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

و) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}=0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Ln(x+1)}{x+1}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}=1$

ن) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{X\to0}\frac{2}{X}+\frac{1}{X}Ln(1+X)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{X\to0}\frac{2}{X}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1$

$\left(X=\frac{1}{x}\right.$ ولما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $\left.X\to0\right)$.

تطبيق 21 حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f عند أطراف المجال I

ا) $I=]0,+\infty[$ ، $f(x)=x(2-Lnx)$

ب) $I=]-\infty,-3[$ ، $f(x)=Ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

جـ) $I=]1,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x+2}{Lnx}$

د) $I=]0,+\infty[$ ، $f(x)=Ln(x+1)-Lnx$

هـ) $I=]e,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x+1}{1-Lnx}$

✓ الحل

ا) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}[2x-xLn(x)]=0$

لأن $\lim\limits_{x\to0} xLnx=\bar{0}$ و $\lim\limits_{x\to0} 2x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-Lnx)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=Ln(1)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-2}=1$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+3}{x-2}=0^+$

جـ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1} Ln(x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\frac{Lnx}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{Lnx}{x}}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$

د) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0} -Lnx=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0} Ln(x+1)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=Ln(1)=0$

هـ) $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}\frac{x+1}{1-Lnx}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to e}(1-Lnx)=\bar{0}$ و $\lim\limits_{x\to e}(x+1)=e+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-Lnx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{Ln(x)\left(\frac{1}{Lnx}-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{Lnx}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{Lnx}-1}=-\infty$

تطبيق 22 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

عين في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f في المكان المعطى.

ا) $f(x)=\frac{Lnx}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x+1+Ln(x+2)}{x+1}$ عند -1 ، د) $f(x)=\frac{Ln(x)-1}{x^2-1}$ عند 1

✓ الحل

ا) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Lnx$ تكون $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند 1

و لدينا $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

من اجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$ ومنه $g'(1)=1$ اذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times 0$ حالة عدم التعيين

بوضع $X=\frac{1}{x}$ تكون $f(x)=\frac{Ln(1+X)}{X}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $X\to 0$

بوضع $g(X)=Ln(1+X)$ تصبح $\frac{Ln(1+X)}{X}=\frac{g(X)-g(0)}{X-0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و لدينا $\lim\limits_{X\to 0}\frac{g(X)-g(0)}{X-0}=g'(0)$

و لكون $g'(X)=\frac{1}{X+1}$ نجد $g'(0)=1$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=g'(0)=1$

جـ) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=x+1+Ln(x+2)$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند -1

إذن $\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)$.

من اجل كل x من $]-2,+\infty[$ لدينا $g'(x)=1+\frac{1}{x+2}$

ومنه $g'(-1)=2$ إذن $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=2$

د) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Ln(x)-1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $g'(1)=1$ اذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

تطبيق 23 المستقيم المقارب المائل ووضعيته بالنسبة لمنحنى

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+3-\frac{Ln\,x}{x}$

1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

✓ الحل

1) حتى يكون (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-Ln\,x}{x}=0$

إذن $(\Delta): y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

2) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $d(x)$ حيث $d(x)=f(x)-(x+3)$.

$d(x)=f(x)-(x+3)=\frac{-Ln(x)}{x}$

$d(x)=0$ يكافئ $Ln(x)=0$ يكافئ $x=1$

إذا كان $x<1$ فإن $d(x)>0$ ومنه (Δ) يقع فوق (C_f)

وإذا كان $0<x<1$ فإن $d(x)<0$ ومنه (Δ) يقع تحت (C_f)

(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(1,4)$.

تطبيق 24 دراسة قابلية الاشتقاق

1) f دالة معرفة على $I=[-1,+\infty[$ بـ:

$\begin{cases} f(x)=(x+1)^2\,[1-Ln(x+1)] & ,\ x>-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$

ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=-1$

2) g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$

إذا كان $x\neq 1$ و $g(1)=0$ ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 1.

✓ الحل

1) حتى تقبل الدالة f الاشتقاق عند $x=-1$ يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\ell$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)[1-Ln(x+1)]$

$=\lim\limits_{x\to -1}[(x+1)-(x+1)Ln(x+1)]=0=\ell$

إذن f قابلة للاشتقاق عند العدد -1

2) حتى تقبل الدالة g الاشتقاق عند 1 يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\ell'$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}=1\times(\infty)=\infty$$

ومنه الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

تطبيق 25 مشتق الدالة المركبة

في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من I ثم أحسب $f'(x)$.

أ) $I=\mathbb{R}$ ، $f(x)=Ln(2+x^2)$

ب) $I=]1,+\infty[$ ، $f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

ج) $I=]0,+\infty[$ ، $f(x)=x-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

د) $I=]1,+\infty[$ ، $f(x)=Ln(Ln\,x)$

✓ الحل

أ) الدالة $x\xrightarrow{u}2+x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)>0$ ومنه الدالة $f=Ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{2x}{2+x^2}$

ب) الدالة $u:x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $]1,+\infty[\subset D_u$

ومن أجل كل x من $]1,+\infty[$ يكون $u(x)>0$.

إذن الدالة $f=Ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

ج) الدالة $u:x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $u(x)>0$ ومنه الدالة $Ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا $(Ln\circ u)'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}$

- الدالة $x\xrightarrow{f}-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وهما $x\mapsto -x$ و $x\mapsto Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

هما $x\mapsto f_1(x)$ و $x\mapsto x$ ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا ،

$$f'(x)=1-\left[Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(x+1)}\times x\right]=1-Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}$$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}Ln\,x$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$.

و من أجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا $u(x)>0$

ومنه الدالة $f=Ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{x}\times\frac{1}{Ln\,x}=\frac{1}{x\,Ln\,x}$

تطبيق 26 حل معادلات و متراجحات

في كل حالة من الحالات التالية حل المتراجحات والمعادلات ذات المجهول x .

أ) $2^x\le 100$ ، x عدد طبيعي ، ب) $4^x=10000$ ، x عدد حقيقي

ج) $(0,25)^x=1$ ، x عدد حقيقي ، د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ ، x عدد حقيقي

✓ الحل

أ) $2^x\le 100$ يكافئ $Ln(2^x)\le Ln(100)$

يكافئ $x\,Ln(2)\le Ln(100)$

يكافئ $x\le\frac{Ln(100)}{Ln(2)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $\{0,1,\dots,66\}$

ب) $4^x=10000$ يكافئ $x\,Ln(4)=Ln(10000)$ يكافئ $x=\frac{Ln(10000)}{Ln(4)}$

ج) $(0,25)^x=1$ يكافئ $x\,Ln(0,25)=0$ يكافئ $x=0$

د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ يكافئ $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)\le Ln(0,2)$

يكافئ $x\ge\frac{Ln(0,2)}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $\left[\frac{Ln(0,2)}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)},+\infty\right[$

تطبيق 27 حصر أعداد بواسطة قوة العدد 10

إذا علمت أن $Log\, a = 4,42$ و $Log\, b = 3,68$ اعط حصرا للعددين a و b بواسطة قوى للعدد 10 ثم حصرا للأعداد $a\,b$ ، $\frac{a}{b}$ ، a^2 ، a^3

✓ الحل

- من المتباينة $4 \leq Log\, a < 5$ ينتج $10^4 \leq a < 10^5$
- من المتباينة $3 \leq Log\, b < 4$ ينتج $10^3 \leq b < 10^4$
- لدينا $Log\, a - Log\, b = 0,74$ اي $Log \frac{a}{b} = 0,74$
- وبما أن $0 \leq Log \frac{a}{b} < 1$ فإن $10^0 \leq \frac{a}{b} < 10^1$
- لدينا $Log\, a = 8,84$ $Log\, a^2 = 2\, Log\, a$ إذن $8 \leq Log\, a^2 < 9$ وعليه $10^8 \leq a^2 < 10^9$
- لدينا $Log\,(a\,b) = Log\, a + Log\, b = 8,10$ إذن $8 \leq Log\,(a\,b) < 9$
 وعليه يكون $10^8 \leq a\,b < 10^9$
- لدينا $Log\, a = 13,26$ $Log\, a^3 = 3\, Log\, a$ إذن $13 \leq Log\, a^3 < 14$ وعليه يكون $10^{13} \leq a^3 < 10^{14}$

تطبيق 28 الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و يختلف عن 1 و لتكن g دالة معرفة من أجل $x > 0$ بالعبارة $g(x) = \frac{Ln\, x}{Ln\, a}$

1) احسب $g(a)$ ثم بين أن $g(b \times c) = g(b) + g(c)$

2) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها حسب قيم a .

3) ليكن (γ_a) المنحنى البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ارسم (γ_a) ، $\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ ، (γ_2) في نفس المعلم

✓ الحل

1) $g(a) = \frac{Ln\, a}{Ln\, a} = 1$

$$g(b \times c) = \frac{Ln(b \times c)}{Ln\, a} = \frac{Ln\, b + Ln\, c}{Ln\, a} = \frac{Ln\, b}{Ln\, a} + \frac{Ln\, c}{Ln\, a} = g(b) + g(c)$$

إذن كل الخواص المتعلقة بالدالة Ln تبقى صحيحة بالنسبة إلى الدالة g .

2) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x\, Ln\, a}$

حالة $a > 1$

- إذا كان $a > 1$ فإن $Ln\, a > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	
تغيرات g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

- حالة $0 < a < 1$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و لدينا $g'(x) = \frac{1}{x\, Ln(a)}$

بما أن $Ln\, a < 0$ فإنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) < 0$

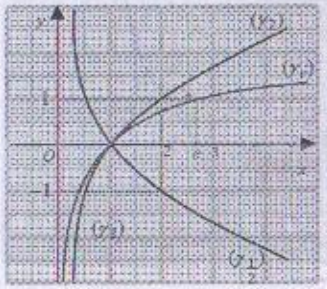
وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$-$	
تغيرات g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

3) (γ_e) له مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

(γ_e) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(1,0)$ و يمر ايضا من النقطة $(e,1)$.



- $\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ يمر من النقطة $(1,0)$ والنقطة $(2,-1)$.
 و له مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.
- (γ_2) يمر من النقطتين $(1,0)$ و $(2,1)$

$\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ هو نظير (γ_2) بالنسبة إلى محور الفواصل

وبصفة عامة $\left(\gamma_{\frac{1}{a}}\right)$ نظير (γ_a) بالنسبة إلى محور الفواصل

تطبيق 29 رسم التمثيل البياني لدالة

f دالة معرفة على المجال $]-1,1[$ بالعبارة $f(x) = Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1) بين أن الدالة f فردية.

2) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$
3) ادرس تغيرات الدالة f على $[0,1[$ ثم ارسم منحناها.

✓ الحل

1) f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من اجل كل x من $]-1,1[$
فإن $-x$ من $]-1,1[$ و $f(-x)=-f(x)$
إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $-x\in]-1,1[$

و $-f(x)=-Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=Ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}}\right)=Ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$ $f(-x)$ ومنه f فردية.

2) الدالة $u: x\mapsto \frac{x+1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ ولدينا $u(x)>0$
ومنه الدالة $f=Lnou$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

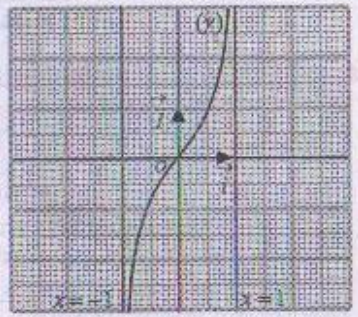
3) دراسة تغيرات f على $[0,1[$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ و $f(0)=0$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ ولدينا $f'(x)=\frac{2}{(1+x)(1-x)}$
من اجل كل x من $[0,1[$ يكون $f'(x)>0$ منه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1[$

بما أن الدالة f فردية نرسم بيانها على المجال $]0,1[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المبدا $O(0,0)$

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$

x	0		1
إشارة $f'(x)$		$+$	
تغيرات f	0	↗	$+\infty$



تطبيق 30 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

1) f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x)-x$
1) ادرس تغيرات الدالة f.
ب) احسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.

2) 1) باستعمال السؤال 1) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=(Lnx)^2-2x$
ب) ارسم (γ) بيان الدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

✓ الحل

1) 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

- إذا كان $x<1$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

- إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من جدول تغيرات f نستنتج انه من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $f(x)\le 0$.

2) 1) دراسة تغيرات g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{2}{x}Lnx-2$

ومنه $g'(x)=\frac{2}{x}(Ln(x)-x)$ اي $g'(x)=\frac{2}{x}\times f(x)$

$g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=1$

من اجل كل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ يكون $g'(x)<0$

اذن $g'(x)$ سالب و ينعدم عند $x=1$ منه الدالة g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$-$	
تغيرات g	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$

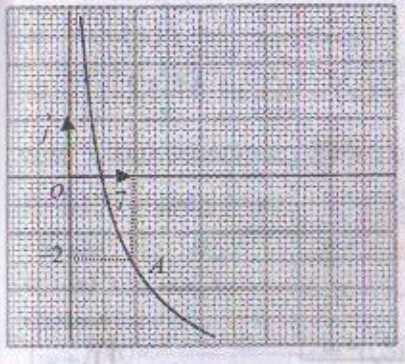
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2-2\left(\sqrt{x}\right)^2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2-2\left(\sqrt{x}\right)^2$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{2\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[2\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2-1\right] = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2=+\infty$



ب) المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-2$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x\right)=+\infty$

إذن المنحنى (C_f) ليس له مستقيم مقارب مائل.

- بما أن $g'(x)$ ينعدم عند $x=1$

و لا يغير إشارته في جوار 1 فإن النقطة

$A(1,-2)$ نقطة إنعطاف لـ (C_g)

و المماس عندها يخرق المنحنى (C_g)

تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بالعبارة التالية :

$$f(x)=x-2+2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2)

أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل للدالة f

ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم بالتدقيق (γ) و (Δ) في نفس المعلم.

الحل

1) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to1} Ln\ \frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

اتجاه تغير f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى I و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على I هي نفس إشارة (x^2-x-2)

- إذا كان $x\in]1,2]$ فإن $f'(x)\langle 0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $]1,2]$

- إذا كان $x\in[2,+\infty[$ فإن $f'(x)\rangle 0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $[2,+\infty[$

x	1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	−	0	+	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

$f(2)=2\,Ln(2)$

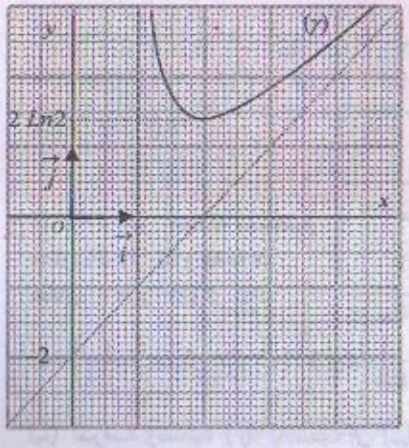
$f(2)\approx 1,38$

2) 1) $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (γ) إذا و فقط إذا كان:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$



ب) لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على I.

$$f(x)-(x-2)=2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x\in I$ يكون $x\rangle x-1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1}\rangle 1$ و منه ينتج

$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\rangle Ln(1)$

أي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\rangle 0$

إذن $f(x)-(x-2)\rangle 0$

و هذا يعني أن المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)

تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[=I$ بالعبارة التالية ،

$$f(x)=x-2+2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل للدالة f

ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (γ) و (Δ) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1} Ln\,\frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

اتجاه تغير f ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $(x=-1)$ او $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى I و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على I هي نفس إشارة (x^2-x-2)

- إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $]1,2[$

- إذا كان $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.

$f(2)=2\,Ln(2)$

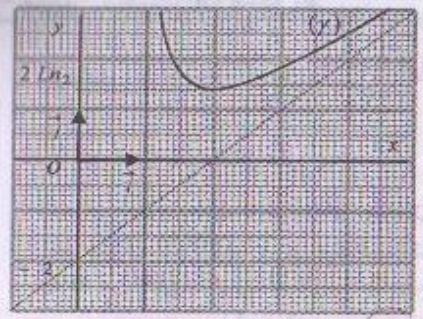
$f(2)\approx 1,38$

x	1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	−	0	+	
تغيرات f	‖	$+\infty$ ↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

2) أ) $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (γ) إذا و فقط إذا كان: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

ب) لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على I.



$f(x)-(x-2)=2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

من اجل كل $x\in I$ يكون $x>x-1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1}>1$ و منه ينتج

$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>Ln(1)$ اي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$

إذن $f(x)-(x-2)>0$

و هذا يعني أن المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)

تطبيق 32 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(0)=1$ و من اجل $x>0$ ؛

$$f(x)=\frac{Ln(1+x)}{x}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=Ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج ان من اجل كل x من $[0,+\infty[$ يكون :

$$Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

جـ) بطريقة مماثلة بين انه إذا كان $x\ge0$ فإن $Ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$

د) تحقق ان من أجل كل $x>0$ يكون $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le\frac{-1}{2}+\frac{x}{3}$

هـ) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر و أن $f'(0)=\frac{-1}{2}$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين.

بوضع $\kappa(x)=Ln(1+x)$ نجد $\kappa(0)=0$ و منه $\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}$

الدالة κ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند الصفر

ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=\kappa'(0)$ لكن $\kappa'(x)=\frac{1}{1+x}$ إذن $\kappa'(0)=1$

وعليه $\lim_{x\to 0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$ مما يفسران f مستمرة من اليمين عند 0.

2) أ) g قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1}{x+1}-(1-x+x^2)=\frac{-x^3}{x+1}$

بما أن $x\geq 0$ فإن $g'(x)\leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.

ب) بما أن $g(0)=0$ و g متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه من أجل كل $x\in[0,+\infty[$ يكون $g(x)\leq 0$

وهذا يعني أن $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]\leq 0$ أي $Ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

جـ) نضع $d(x)=Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]$

ندرس اتجاه تغير d على $I=[0,+\infty[$

الدالة d قابلة للاشتقاق على I

و انه من أجل كل x من I لدينا $d'(x)=\frac{x^2}{1+x}$

بما أن $x\geq 0$ فإن $\frac{x^2}{x+1}\geq 0$

وهذا يعني أن $d'(x)\geq 0$ إذن فإن الدالة d متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

بما أن $d(0)=0$ و d متزايدة تماما على I

فإنه من أجل كل $x\geq 0$ لدينا $d(x)\geq 0$

أي $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]\geq 0$ وهذا يعني أن $Ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$

د) من السؤالين (ب) و (جـ) نجد $x-\frac{x^2}{2}\leq Ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

بإضافة $-x$ نجد $-\frac{x^2}{2}\leq Ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

وبالقسمة على x^2 نجد $-\frac{1}{2}\leq\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

هـ) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{Ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}$

بما أن $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}\leq\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

فإنه حسب نظرية الحصر تستنتج $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

وبالتالي $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

تطبيق 33 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $]3,+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)Ln(x-3)$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1cm)

1) تحقق انه من أجل $x>3$ يكون $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) أحسب $f''(x)$ حيث f'' المشتق الثاني للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير f'.

3) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]3,+\infty[$.

4) أ) ادرس نهاية f عند أطراف المجال $]3,+\infty[$ ثم حدد المستقيمات المقاربة لـ (γ).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

5) عين نقط تقاطع (γ) مع $(x'x)$ ثم ارسم (γ).

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f''(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=7$

إذا كان $x<7$ فإن $f''(x)<0$ بالتالي f' متزايدة تماما على $]7,+\infty[$.

إذا كان $3<x<7$ فإن $f''(x)<0$ و بالتالي f' متناقصة تماما على $]3,7[$.

3) بما أن $f''(x)$ موجبة على $]7,+\infty[$ و سالبة على $]3,7[$ و $f''(7)=0$ فإن الدالة f' لها قيمة حدية صغرى هي $f'(7)$ على المجال $]3,+\infty[$.

بالتالي من اجل كل $x\in]3,+\infty[$ يكون $f'(x)\geq f'(7)$

و بما أن $f'(7)=\frac{8}{2}+2Ln(2)$ أي $f'(7)>0$ فإن $f'(x)>0$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln(x-3)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}Ln(x-3)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}Ln(x-3)=+\infty$

إذن المنحني (γ) ليس له مستقيم مقارب في جوار $(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to3}Ln(x-3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to3}(x+1)=4$

إذن (γ) له مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$

ب) بما أن $f'(x)$ موجبة تماما على $]3,+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]3,+\infty[$

x	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	
تغيرات f	$-\infty$	$+\infty$

5) فاصلة نقطة التقاطع المنحني (γ) مع $(x'x)$ هي حل المعادلة $f(x)=0$.

$f(x)=0$ يكافئ $(x+1)=0$

او $Ln(x-3)=0$ و $x>3$

يكافئ $(x=-1)$ او $(x-3=1)$ و $x>3$

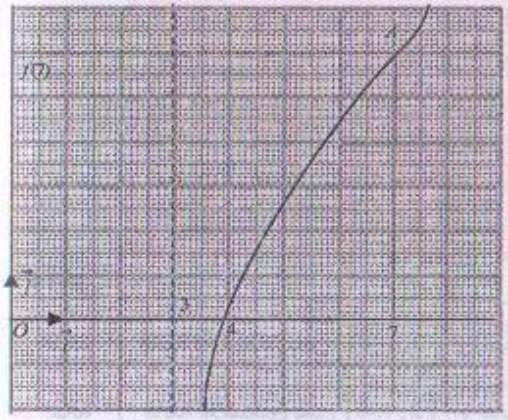
يكافئ $(x=-1)$ او $(x=4)$ و $x>3$

إذن $f(x)=0$ يكافئ $(x=4)$.

و عليه (γ) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(4,0)$

بما أن $f''(x)$ ينعدم عند 7 مغيرا إشارته في جوار 7 فإن النقطة $A(7,f(7))$ نقطة انعطاف للمنحني (γ)

$f(7)=8\,Ln(4)=16\,Ln(2)$



تطبيق 34 دراسة دالة و حل المعادلات

I) نعتبر g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\,Ln\,x$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

II) نعتبر f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-(Ln\,x)^2$

1) بين انه من اجل كل $x>0$ يكون $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و عند الصفر.

3) باستعمال الفرع I) ادرس تغيرات الدالة f . ثم ارسم (γ) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 5 cm)

III) 1) بين ان المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,1[$.

2) بين ان المعادلة $f(x)=\frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]1,+\infty[$.

3) أ) بين ان $\alpha\beta=1$

ب) عين حصرا لـ β بتقريب $0,001$ ثم استنتج حصرا لـ α.

✓ الحل

I) 1) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[x^4-1-4x(x\,Ln\,x)\right]=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to0}xLn(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{1}{x}\right]=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$

اتجاه تغير g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$

$g'(x)=0$ يكافيء $x=1$ أو $x=-1$

بما أن $x>0$ فإن للمعادلة $g'(x)=0$ حلا وحيدا $x=1$

من اجل كل $x>0$ و $x\neq1$ لدينا $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	$+$	
تغيرات g	$-\infty$	0	$+\infty$

2) $g(1)=0$

إذا كان $x<1$ فإن $g(x)<0$ واذا كان $x>1$ فإن $g(x)>0$

II) 1) من أجل كل $x>0$ لدينا :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{4}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\left(Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2=\frac{1}{4x^2}+\frac{x^2}{4}-(-Ln\,x)^2$$

$= \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (Ln\,x)^2 = f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{Ln\,x}{x}\right)^2\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} - (x\,Ln\,x)^2\right] = +\infty$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,,+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$

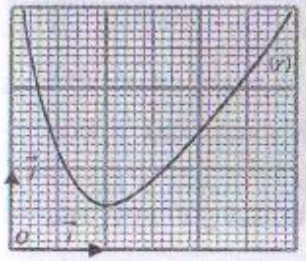
$f'(x) = 0$ يكافىء $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

- بما أن من أجل كل $x \rangle 1$ يكون $g(x) \rangle 0$ فإن $f'(x) \rangle 0$

- و إذا كان $0 \langle x \langle 1$ فإن $g(x) \langle 0$ و منه $f'(x) \langle 0$

إذن f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$ و متناقصة تمام على $]0,1[$



III) 1) نضع $h(x) = f(x) - x$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0\,,1[$

و لدينا $h'(x) = f'(x) - 1$

- بما أن $f'(x) \rangle 0$ على المجال $]0\,,1[$

فإن $h'(x) \rangle 0$ على $]0,1[$ و $h(]0,1[) = \left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$

- بما أن $0 \in \left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ فإن للمعادلة $h(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0,1[$

بما أن $h(\alpha) = 0$ فإن $f(\alpha) = \alpha$

2) نضع $k(x) = f(x) - \frac{1}{x}$

الدالة k قابلة للاشتقاق على $]1\,,+\infty[$ و لدينا $k'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}$

بما أن $f'(x) \rangle 0$ على المجال $]1\,,+\infty[$ فإن $k'(x) \rangle 0$

بما أن $0 \in \left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ و $k(]1,+\infty[) = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

فإن للمعادلة $k(x) = 0$ حلا وحيدا β من $]1\,,+\infty[$ اي $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$

3) 1) لدينا $f(\alpha) = \alpha$ و $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$

بما ان $\beta \rangle 1$ فإن $\frac{1}{\beta} \langle 1$

لدينا $f(\beta) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$

إذن $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$ و $f(\alpha) = \alpha$

وبما ان للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا

فإن $\frac{1}{\beta} = \alpha$ اي $\alpha\beta = 1$

x	$K(x)$
1	−0,5
2	0,08204
الخطوة $p = 1$	

ب) نستعمل طريقة المسح لتحديد المجال $]a\,,b[$ الذي ينتمي إليه β في المرحلة الأولى ،

ثم نستعمل طريقة ديكتومي لتحديد حصر أدق .

من الجدول المجاور نستنتج ان $\beta \in]1,2[$

$k\left(\frac{3}{2}\right) = -0,15080 \langle 0$

$k(1,75) = -0,027243 \langle 0$

$k(1,875) = 0,10916 \rangle 0$ إذن $\beta \in]1,750\,,1,875[$

- بما أن $\beta \in]1,750\,,1,875[$ و الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة على المجال $]1,750\,,1,875[$

فإن $\frac{1}{\beta} \in \left]\frac{1}{1,875}\,,\frac{1}{1,750}\right[$ اي $\alpha \in \left]\frac{1}{1,875}\,,\frac{1}{1,750}\right[$

ومنه $\alpha \in]0,533\,,0,571[$

تطبيق 35 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0,1\}$ بالعبارة $f(x) = -\frac{x}{2} + Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) 1) بين انه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ فإن :

$\frac{1}{2}[f(x) + f(1-x)] = -\frac{1}{4}$

ب) استنتج ان النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (γ).

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجالين $\left]\frac{1}{2}\,,1\right[$ و $]1,+\infty[$

3) أ) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (γ)
ثم حدد الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى (Δ) .
ب) ارسم (γ) و (Δ) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) أ) من اجل كل $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$;

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(1-x)\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\left(\frac{1-x}{2}\right)+Ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+Ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\times\frac{x}{x-1}\right|\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln|1|\right]=-\frac{1}{4}$$

ب) لدينا $\frac{1}{2}\left[f(x)+f(1-x)\right]=-\frac{1}{4}$ (*)

$A(a,b)$ مركز تناظر لـ (γ) إذا وفقط إذا كان $f(2a-x)=2b-f(x)$

اي $\frac{1}{2}\left[f(x)+f(2a-x)\right]=b$

من العلاقة (*) نستنتج ان $b=-\frac{1}{4}$ و $a=\frac{1}{2}$ ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ (γ)

2) دراسة تغيرات الدالة f على $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$

x		-1		0		1		2	
$-(x+1)(x-2)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x(x-1)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$		$+$
$\frac{-(x-1)(x+2)}{2x(x-1)}$	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ او $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)<0$

إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)>0$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^+$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right|=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)=-\infty$

جدول تغيرات f على $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

x	$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
تغيرات f	$\frac{-1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1-Ln(2)$	↘	$-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$
$=Ln(1)=0$

ومنه $y=\frac{-x}{2}$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

- لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة المقدار $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)$ على $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

لدينا $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

. إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

بما ان $x>0$ $1-x>0$ فإن $\frac{1-x}{x}<1$ ومنه $Ln\left(\frac{1-x}{x}\right)<0$

اي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

. إذا كان $x\in]1,+\infty[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

بما ان $x>0$ $x-1>0$ فإن $\frac{x-1}{x}<1$

اي $Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)<0$

ومنه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $]1,+\infty[$

صورة (Δ) بالتناظر المركزي الذي مركزه A هو المستقيم (Δ).

صورة المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{1}{2}$ هو نفسه.

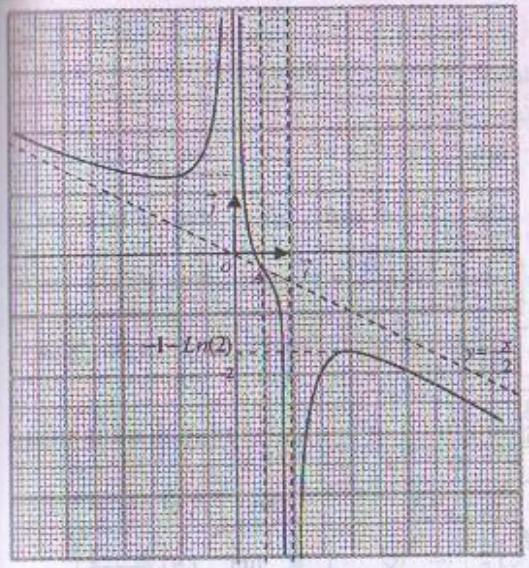
صورة النقطة $(2,-1-Ln(2))$ هي النقطة $\left(-1,\ \frac{1}{2}+Ln(2)\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$

$=-(-\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$



تطبيق 36 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

I) g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-Ln(1+x^2)$

1) بين أنه على المجال $]1,+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ثم حدد حصرا له بتقريب $0,1$.

2) عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

II) f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x} \quad ; x>0 \end{cases}$

1) ما هي نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ لما x يؤول إلى 0 ؟

ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ثم أوجد معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ للمنحنى البياني (γ) الممثل لـ f

2) بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{2Ln\,x}{x}+\frac{1}{x}Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$

3) 1) بين انه من أجل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج تغيرات f.

ب) بين ان $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم (T) و (γ)

✓ الحل

I) 1) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $x>1$ لدينا $g'(x)<0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$

وبالتالي $g([1,+\infty[)=]-\infty,\ 1-Ln\,2[$

بما أن $0\in]-\infty,\ 1-Ln\,2[$ و $g'<0$

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1,+\infty[$

- تعيين حصر لـ α

باستعمال طريقة المسح نجد أن $\alpha\in]1,2[$ نحسب $g\left(\frac{1+2}{2}\right)$ اي $g(1,5)$

$g(1,5)=0,206>0$ و منه $\alpha\in]1,5\ ,2[$

2) تعيين إشارة $g(x)$

بما أن g متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$ و $g(\alpha)=0$ و $g(1)>0$ فإن :

إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ يكون $g(x)<0$

وإذا كان $x\in]1,\alpha[$ يكون $g(x)>0$

x	0	1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	‖	+	0	−

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,1[$ و $g(0)=0$ و $g(1)>0$

فإنه من أجل كل $x\in]0\ ,1[$ يكون $g(x)>0$

II) $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x} \quad ; x>0 \end{cases}$

1) 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1=\ell$

حيث $X=x^2$

ب) بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ تساوي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

و بالحساب نجد $y=x$.

2) من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)=\frac{2Ln(x)}{x}+\frac{1}{x}\times Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2Ln(x)}{x}=0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) ا) من أجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

$f'(x)=0$ يكافىء $g(x)=0$ يكافىء $x=\alpha$

إذا كان $x\in]0,\alpha[$

فإن $f'(x)>0$

و بالتالي f متزايدة تماما على $[0,\alpha]$

و إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$

فإن $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]\alpha,+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
تغيرات f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

ب) بما أن $g(\alpha)=0$ فإن $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}-Ln(\alpha^2+1)=0$

اي $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}=Ln(\alpha^2+1)$

$$f(\alpha)=\frac{Ln(\alpha^2+1)}{\alpha}=\frac{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha}=\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$$

نضع $L(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

الدالة L قابلة للاشتقاق على $]1,5\ ,2[$

ولدينا $L'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ومن أجل كل x من $]1,5\ ,2[$

لدينا $L'(x)<0$

اي L متناقصة تماما على $]1,5\ ,2[$

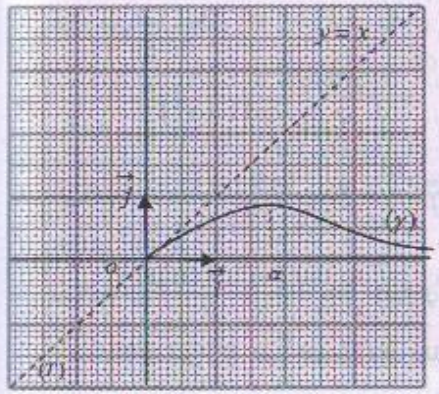
وعليه $L(]1,5\ ,2[)=]0,75\ ,0,923[$

و بما أن $L(\alpha)=f(\alpha)$

فإن $f(\alpha)\in]0,75\ ,0,923[$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$

مقارب لـ (γ) في جوار $(+\infty)$



تطبيق 37 عائلة المنحنيات

n عدد طبيعي غير معدوم و f_n دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بالعبارة $f_n(x)=x^n\,Ln(x+1)$ و (γ_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 2 cm)

1) لتكن h_n دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $h_n(x)=n\,Ln(1+x)+\frac{x}{x+1}$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة h_n

ب) احسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على $]-1,+\infty[$

2) ا) تحقق انه من أجل كل $x\in]-1,+\infty[$ لدينا :

$f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$ مع $n\geq 2$

ب) نضع $n=1$ تحقق أن $f_1'(x)=h_1(x)$ ثم بين ان $f_1'(x)$ و $h_1(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]-1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f_2

3) ا) بين أن جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) ا) دراسة اتجاه تغير h_n :

الدالة h_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

و لدينا $h_n'(x)=\frac{nx+(n+1)}{(x+1)^2}$

فالمعادلة $h_n'(x)=0$ لها حل وحيد هو $x=-\left(\frac{n+1}{n}\right)$

بما أن $-1<-\left(\frac{n+1}{n}\right)$ فإن المعادلة $h_n'(x)=0$ ليس لها حلولا في $]-1,+\infty[$

و إشارة $h_n'(x)$ هي نفس إشارة $nx+(n+1)$

من الجدول المجاور نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1,+\infty[$ يكون $h_n'(x)>0$ إذن الدالة h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$

x	-1		$-\left(\frac{n+1}{n}\right)$		$+\infty$
$nx+(n+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ب) بما أن $h_n(0)=0$ فإنه إذا كان $x\in]-1,0[$ يكون $h_n(x)<0$

و إذا كان $x\in]0,+\infty[$ يكون $h_n(x)>0$

2) 1) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ ولدينا $f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$

ب) من أجل $n=1$ نجد $f_1'(x) = h_1(x)$

وبالتالي إشارة $f_1'(x)$ هي نفس إشارة $h_1(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -1} x\,Ln(x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

x	-1		0		$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f_1	‖	$+\infty$	0		$+\infty$

جـ) من أجل $n=2$:

$f_2'(x) = x\,h_2(x)$

$f_2'(0) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $f_2'(x) > 0$

وإذا كان $-1 < x < 0$ فإن $f_2'(x) < 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f_2(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2\,Ln(x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,Ln(x+1) = +\infty$

x	-1		0		$+\infty$
إشارة $f_2'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
تغيرات f_2	‖	$-\infty$			$+\infty$

3) 1) $M_0(x_0, y_0)$ تنتمي إلى (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) مع $n_1 \neq n_2$

هذا معناه أن :

$y_0 = x_0^{n_1} Ln(x_0+1)$

و $y_0 = x_0^{n_2} Ln(x_0+1)$

ومنه ينتج $x_0^{n_1} Ln(x_0+1) = x_0^{n_2} Ln(x_0+1)$

وبالتبسيط نجد $(Ln(x_0+1))(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) = 0$

أي $Ln(x_0+1) = 0$ لأن $x_0^{n_1} - x_0^{n_2} \neq 0$

$Ln(x_0+1) = 0$ يكافىء $x_0 = 0$ و عليه $y_0 = 0$

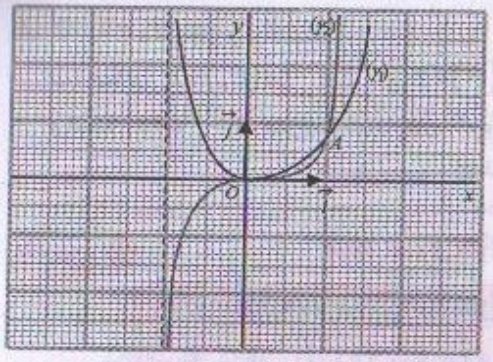
إذن النقطة $O(0,0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (γ_n).

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2)

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة المقدار $f_2(x) - f_1(x)$ على $]-1,+\infty[$

$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)Ln(1+x)$

x	-1		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$Ln(1+x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	



- المنحنى (γ_2) يقطع المنحنى (γ_1) في النقطة $O(0,0)$ و يقطعه أيضا في النقطة $A(1, Ln(2))$

- إذا كان $x > 1$ فإن (γ_2) يقع فوق (γ_1)

- إذا كان $x \in]-1,1[$ فإن (γ_2) يقع تحت (γ_1)

تطبيق 38 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

(V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n = Ln(U_n) - 2$

1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية معينا حدها الأول V_0 و أساسها r .

2) استنتج عبارة V_n و $Ln(U_n)$ بدلالة n .

3) أ) ما هي نهاية (V_n) ؟

ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو e^2 .

✓ الحل

1) (V_n) هندسية معناه انه يوجد r من $\mathbb{R}^*$ بحيث من أجل كل n لدينا $V_{n+1} = V_n \times r$

$V_{n+1} = Ln(U_{n+1}) - 2 = Ln\left(e\sqrt{U_n}\right) - 2 = Ln(e) + Ln\left(\sqrt{U_n}\right) - 2$

$= 1 + \frac{1}{2}Ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2}(Ln(U_n) - 2) = \frac{1}{2}V_n$

إذن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = Ln(U_0) - 2 = 1$

2) $V_n = V_0 \times r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$Ln(U_n) = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

3) أ) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ لأن $0 < \frac{1}{2} < 1$

ب) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} Ln(U_n) = 2$ و $Ln(e^2) = 2$

و الدالة $x \mapsto Ln\,x$ متزايدة تماما فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^2$

تطبيق 39 • الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \geq 1$ بـ $U_1 = 2$

و $Ln(U_{n+1}) = \frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$

1) بين أن هذه المتتالية معرفة و أن جميع حدودها أصغر من أو يساوي 2 .

2) من أجل كل $n \geq 1$ نعرف المتتاليتين (V_n) و (W_n) بـ $V_n = n \times U_n$

و $W_n = Ln(V_n)$

أوجد العلاقة بين V_n و V_{n+1} ثم استنتج أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها r .

3) بين أن المتتالية (W_n) متقاربة ثم استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية يطلب إيجادها .

4) - أ) احسب المجموع $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ ثم استنتج عبارة الجداء $\pi_n = V_1 V_2 \ldots \times V_n$ ثم عبارة Q_n حيث $Q_n = U_1 U_2 \ldots \times U_n$

ب) ادرس نهايات المتتاليات (S_n) ، (Q_n) ، (π_n) .

✓ الحل

1) الدالة $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$

و بالتالي من أجل كل x من $[1, +\infty[$ لدينا $0 < \frac{x}{(x+1)^2} < \frac{1}{2}$

و منه ينتج $0 < \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}$

نريد إثبات أن من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq 2$ ، نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع

نسمي P_n الخاصية $(0 < U_n \leq 2)$

P_1 صحيحة لأن $0 < U_1 \leq 2$

نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < U_n \leq 2$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $0 < U_{n+1} \leq 2$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ و $0 < \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$ فإن $0 < U_n \times \frac{n}{(n+1)^2} \leq 1$

ومنه نستنتج $0 < Ln\left(U_n \times \frac{n}{(n+1)^2}\right)$ أي $0 < Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)$

وبالقسمة على 2 نجد $0 < \frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$ أي $0 < Ln(U_{n+1})$.

بما أن $0 < Ln(U_{n+1})$ فإن $0 < U_{n+1} < 1$ و بما أن $1 \leq 2$

فإن $0 < U_{n+1} \leq 2$ إذن P_{n+1} صحيحة

وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

2) $Ln(V_{n+1}) = Ln((n+1)U_{n+1})$ ومنه $V_{n+1} = (n+1)U_{n+1}$

$$Ln(V_{n+1}) = Ln(n+1) + Ln(U_{n+1}) = Ln(n+1) + \frac{1}{2}\left[Ln(U_n) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$$

$$= Ln(n+1) + \frac{1}{2}Ln(U_n) + \frac{1}{2}Ln(n) - Ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}Ln(U_n) + \frac{1}{2}Ln(n) = \frac{1}{2}Ln(n \times U_n)$$

$$= \frac{1}{2}Ln(V_n) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

ومنه $V_{n+1} = V_n^{\frac{1}{2}}$

- استنتاج أن المتتالية (W_n) هندسية .

$$W_{n+1} = Ln(V_{n+1}) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}Ln(V_n) = \frac{1}{2}W_n$$

ومنه المتتالية (W_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$.

3) بما أن $r = \frac{1}{2}$ فإن المتتالية (W_n) متقاربة نحو الصفر

بما أن $W_n = Ln(V_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

لأن $\left(U_n = V_n \times \frac{1}{n}\right)$

4) أ) $W_1 = Ln(V_1) = Ln(U_1) = Ln(2)$ ، $S_n = W_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$S_n = Ln(2) \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

- $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$
$S_n = Ln(V_1) + \dots + Ln(V_n)$
$S_n = Ln(V_1 \times \dots \times V_n) = Ln(\pi_n)$

ومنه $\pi_n = e^{S_n} = e^{-2Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}$

$\pi_n = (1 \times U_1)(2 \times U_2) \times \dots \times (n\, U_n)$
$\pi_n = (1 \times 2 \times \dots \times n)(U_1 \times \dots \times U_n)$

$\pi_n = (n!)\, Q_n$ ومنه $Q_n = \frac{\pi_n}{n!}$

ب) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2Ln(2)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{S_n} = e^{2Ln(2)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi_n}{n!} = 0$

لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_n = e^{2Ln(2)}$

تطبيق 40 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

f دالة معرفة على المجال $I =]e+1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x-1}{Ln(x-1)} + 1$

1) أ) عين اتجاه تغير الدالة f

ب) عين نهاية f على أطراف المجال I .

جـ) برهن أنه إذا كان $x > e+1$ فإن $f(x) > e+1$

2) نعرف المتتالية (U_n) بـ $U_0 = e^2 + 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،
$U_{n+1} = f(U_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > e+1$

ب) برهن أن المتتالية (U_n) متناقصة

جـ) استنتج أن (U_n) متقاربة نحو ℓ ثم عين ℓ .

✓ الحل

1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]e+1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{Ln(x-1) - 1}{[Ln(x-1)]^2}$

بما أن $x > e+1$ فإن $x-1 > e$

ومنه $Ln(x-1) > 1$ إذن $f'(x) > 0$ على المجال $]e+1, +\infty[$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

ب) $\lim\limits_{x \to e+1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

جـ) بما أن الدالة f متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

فإنه إذا كان $x > e+1$ يكون $f(x) > f(e+1)$ أي $f(x) > e+1$

2) أ) نسمي P_n الخاصية $(U_n > e+1)$

P_0 صحيحة لأن $U_0 = e^2 + 1$ و $e^2 + 1 > e+1$

نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n > e+1$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > e+1$

بما أن $U_n > e+1$ و f متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$

فإن $f(U_n) > f(e+1)$ أي $U_{n+1} > e+1$

ومنه P_{n+1} صحيحة

و بالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بما أن f متزايدة تماما على $]e+1, +\infty[$ فإن (U_n) رتيبة،

ولتعيين نوع الرتابة نحسب $U_1 - U_0$.

إذا كان $U_1 - U_0 > 0$ نقول أن (U_n) متزايدة

وإذا كان $U_1 - U_0 < 0$ نقول أن (U_n) متناقصة

$U_1 - U_0 = \frac{U_0 - 1}{Ln(U_0 - 1)} + 1 - U_0 = -\frac{1}{2} e^2 < 0$

ومنه (U_n) متناقصة

جـ) بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو ℓ حيث ℓ حل لـ $f(x) = x$

$f(x) = x$ يكافئ $(x = 1)$ أو $(x = e+1)$

بما أن $1 \notin]e+1, +\infty[$ فإنه مرفوض و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e+1$

تطبيق 41 PH الكيمياء

في الكيمياء الرمز PH يعني كمون الهيدروجين.

PH يسمح لنا بالتعبير عن الطبيعة الحمضية أو الأساسية لمحلول مائي .

إذا كانت $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ تمثل تركيز شوارد الهيدروجين بالمول.

نضع $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right]$.

1) من اجل محلول حمضي لدينا $1 < PH < 7$ استنتج تركيز $\left[H_3O^+\right]$.

2) من اجل محلول قاعدي (أساسي) لدينا $7 < PH < 14$ استنتج تركيز $\left[H_3O^+\right]$ لهذا المحلول القاعدي.

3) ماء معدني غازي يحمل إشارة $PH = 6,5$ ما هو تركيزه بشوارد $\left[H_3O^+\right]$ ؟

4) متوسط تركيز $\left[H_3O^+\right]$ في بول لأكلات اللحوم هو $\left[H_3O^+\right] = 3,2\times10^{-6}$ مول على اللتر. احسب PH هذا المحلول. ماذا تستنتج ؟

5) إذا علمت أن تركيز H_3O^+ في الدم هو 4×10^{-8} مول على اللتر، بين أن الدم له طبيعة قاعدية ضعيفة.

✓ الحل

1) $1 < PH < 7$ هذا يعني $1 < -\text{Log}\left[H_3O^+\right] < 7$ اي $1 < \text{Log}\dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]} < 7$

بما أن الدالة $x \mapsto 10^x$ متزايدة تماما فإنه ينتج $10^1 < \dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]} < 10^7$

بالقلب نجد $10^{-7} < \left[H_3O^+\right] < 10^{-1}$

2) $7 < PH < 14$ هذا يعني $7 < -\text{Log}\left[H_3O^+\right] < 14$.

منه نستنتج $7 < -\text{Log}\left[H_3O^+\right] < 14$ $10^7 < \dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]} < 10^{14}$

بالقلب نجد $10^{-14} < \left[H_3O^+\right] < 10^{-7}$

3) $PH = -\text{Log}\left[H_3O^+\right]$ منه $PH = \text{Log}\dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]}$ منه $\dfrac{1}{\left[H_3O^+\right]} = 10^{PH}$

بالقلب نجد $\left[H_3O^+\right] = 10^{-PH}$ اي $\left[H_3O^+\right] = 10^{-6,5}$

4) $PH = -\text{Log}\left[H_3O^+\right] = -\text{Log}\left(3,2\times10^{-6}\right) = 5,494$

بما أن $1 < PH < 7$ فإن هذا المحلول حمضي.

5) $\left[H_3O^+\right] = 4\times10^{-8}$ ومنه $PH = -\text{Log}\left(4\times10^{-8}\right) = 7,40$

بما أن $7 < PH < 14$ فإن هذا المحلول قاعدته ضعيفة .

تطبيق 42 حل المعادلات والمتراجحات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

أ) $7^{x-2} = 5^x$ ، ب) $5^x \geq 4$ ، جـ) $\dfrac{3^x}{3^x+1} < \dfrac{1}{4}$

د) $2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0$ ، هـ) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ و) $5^{x+1} + 2\times5^{-x} = 7$

✓ الحل

أ) $7^{x-2} = 5^x$ تكافئ $(x-2)\,Ln(7) = x\,Ln(5)$ يكافئ $x = \dfrac{2\,Ln(7)}{Ln\left(\frac{7}{5}\right)}$

ب) $5^x \geq 4$ يكافئ $x\,Ln(5) \geq 4$ يكافئ $x \geq \dfrac{4}{Ln(5)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $5^x \geq 4$ هي $S = \left[\dfrac{4}{Ln(5)}, +\infty\right[$

جـ) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3^x}{3^x+1}$ يكافئ $3^x + 1 < 4\times3^x$ يكافئ $x \leq -1 + \dfrac{1}{Ln(3)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = \left]-\infty, -1+\dfrac{1}{Ln(3)}\right]$

د) المعادلة (د) تكتب $\left(2^{2x}\right)^2 \times 2^{-2} - 2^{2x} - 3 = 0$ و بوضع $X = 2^{2x}$

تصبح $2^{-2}X^2 - X - 3 = 0$ وحلا هذه الأخيرة هما -4 و 12

X_2 مرفوض لأنه سالب و X_1 مقبول

$X = X_1$ تكافئ $x = \dfrac{Ln(12)}{Ln(4)}$ ومنه $S = \left\{\dfrac{Ln(12)}{Ln(4)}\right\}$

هـ) المتراجحة (هـ) تكتب على شكل $\left(2^x\right)^2 + 2\times2^x - 3 \leq 0$

وبوضع $X = 2^x$ تصبح $X^2 + 2X - 3 \leq 0$.

للمعادلة $X^2 + 2X - 3 = 0$ حلان هما 1 و -3

و بالتالي $X^2+2X-3=(X+3)(X-1)$ إذن $(2^x)^2+2\times 2^x-3=(2^x+3)(2^x-1)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $2^x+3>0$

و منه إشارة $(2^x)^2+2\times 2^x-3$ هي نفس إشارة (2^x-1).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة 2^x-1	-	0	+
إشارة $(4^x+2^{x+1}-3)$	-	0	+

من الجدول المجاور نستنتج أنه إذا كان $x\le 0$ فإن $4^x+2^{x+1}-3\le 0$ و منه مجموعة حلول المتراجحة $4^x+2^{x+1}-3\le 0$ هي $S=]-\infty,0]$

و) بضرب طرفي المعادلة (و) في العدد 5^x نجد $5^{2x+1}+2=7\times 5^x$ بالتبسيط نجد $5^{2x+1}-7\times 5^x+2=0$ و بوضع $X=5^x$ تصبح $5X^2-7X+2=0$.

حلا المعادلة $5X^2-7X+2=0$ هما 1 و $\frac{2}{5}$.

$X=1$ يكافئ $5^x=1$ تكافئ $x=0$

$X=\frac{2}{5}$ يكافئ $5^x=\frac{2}{5}$ يكافئ $x=\frac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلا المعادلة (و) هي $S=\left\{\frac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}\ ,\ 0\right\}$.

تطبيق 43 حل جملة معادلتين

حل في $\mathbb{R}^2$ الجملتين التاليتين :

أ) $\begin{cases}x+y=3\\2^x\times 3^y=18\end{cases}$ ، ب) $\begin{cases}5^x\times 5^y=25\\5^x+5^y=\frac{626}{5}\end{cases}$

الحل

أ) $\begin{cases}x+y=3\ \ldots(1)\\2^x\times 3^y=18\ \ldots(2)\end{cases}$

من (1) نجد $y=3-x$ نعوض y في (2) نجد $2^x\times 3^{3-x}=18$

ومنه نستنتج $Ln(2^x)+Ln(3^{3-x})=Ln(18)$ أي $x\,Ln(2)+(3-x)Ln(3)=Ln(18)$

بالتبسيط نجد $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)=Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه نجد $x=1$.

نعوض قيمة x في عبارة y نجد $y=2$

إذن مجموعة حلول الجملة (أ) هي $S=\{(1,2)\}$.

ب) بوضع $5^x=X$ و $5^y=Y$

فالجملة (ب) تصبح كما يلي $(I)\ \ldots\begin{cases}XY=25\ \ldots(1)\\X+Y=\frac{626}{5}\ \ldots(2)\end{cases}$

من المساواة $XY=25$ نجد $Y=\frac{25}{X}$

وبتعويض عبارة Y في المعادلة (2) نجد $X+\frac{25}{X}=\frac{626}{5}$

بالتبسيط نجد $5X^2-626X-125=0$

وبعد حل هذه الأخيرة نجد $X_1=\frac{625+\sqrt{395436}}{10}$ ، $X_2=\frac{625-\sqrt{395436}}{10}$

X_2 سالب فهو مرفوض و X_1 موجب فهو مقبول.

$X=X_1$ يكافئ $5^x=X_1$ يكافئ $x=\frac{Ln(X_1)}{Ln(5)}$

بتعويض قيمة X في عبارة Y نجد $Y=\frac{25}{X_1}$

$Y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $5^y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $y=\frac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left\{\left(\frac{Ln(X_1)}{Ln(5)}\ ,\ \frac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}\right)\right\}$.

تطبيق 44 رسم التمثيل البياني لدالة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)2^x$

ادرس تغيرات f ثم ارسم (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل

$2^x=e^{x\,Ln(2)}$ منه $f(x)=(2-x)\,e^{x\,Ln(2)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2\,e^{x\,Ln2}-\frac{1}{Ln2}(Ln2)\,x\,e^{x\,Ln2}\right]=0$.

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(Ln2)x\,e^{x\,Ln\,2}=\lim\limits_{X\to-\infty}X\,e^{X}=0$ مع $X=x\,Ln\,2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\,Ln\,2}=+\infty$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(-x\,Ln(2)-1+2\,Ln\,2)e^{x\,Ln(2)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\dfrac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}=\alpha$

- إذا كان $x<\dfrac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ فإن $f'(x)>0$

- إذا كان $x>\dfrac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ فإن $f'(x)<0$

x	$-\infty$		$\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

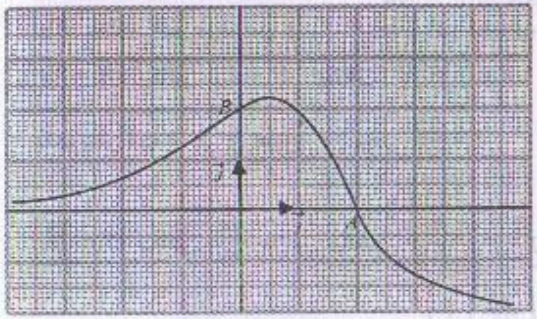
$\dfrac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}\approx 0,56$

و $f\left(\dfrac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}\right)\approx 2,1$

المنحنى (C_f) يقطع $(x'x)$ في النقطة $A(2,0)$

المنحنى (C_f) يقطع $(y'y)$ في النقطة $B(0,2)$

يمكن التأكد من ان المنحنى (C_f) له نقطة انعطاف فاصلتها أكبر 2



تطبيق 45 إيجاد عدد حلول المعادلة $x^3=(1,5)^x$

1) بين انه من أجل كل $x>0$ المساواة $x^3=(1,5)^x$ تكتب على الشكل : $(1)\ \dfrac{Ln(x)}{x}=\dfrac{Ln(1,5)}{3}$

2) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{Ln\,x}{x}$

بين أن للمعادلة $f(x)=\dfrac{Ln(1,5)}{3}$ حلين موجبين فقط .

الحل

1) من المساواة $x^3=(1,5)^x$ ينتج $Ln(x^3)=Ln(1,5)^x$

وباستعمال خواص الدالة Ln نجد $3\,Ln\,x=x\,Ln(1,5)$

ومنه ينتج $\dfrac{Ln(x)}{x}=\dfrac{Ln(1,5)}{3}$.

2) $D_f=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{+}{0}$ و

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	+	0	-	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{+}{0}$

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-Ln\,x}{x^2}=\dfrac{1-Ln\,x}{x^2}$

الدالة f متناقصة تماما على $]e,+\infty[$ و متزايدة تماما على $]0,e]$

ب) بما أن $f'>0$ على $]0,e]$ و $\dfrac{Ln(1,5)}{3}\in\left]-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$

فإن للمعادلة $f(x)=\dfrac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0,e[$.

بما أن $f'<0$ و $\dfrac{Ln(1,5)}{3}\in\left]0,\dfrac{1}{e}\right[$

فإن للمعادلة $f(x)=\dfrac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا β ينتمي إلى $]e,+\infty[$.

تطبيق 46 حل معادلات ومتراجحات

حل المعادلات و المتراجحات و الجمل التالية :

1) $x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2=0$ ، 2) $x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2>0$

3) $\begin{cases}x^y=y^x\\x=y^2\end{cases}$

الحل

1) بوضع $X=x^{\frac{1}{3}}$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2-3X+2=0$ و حلاها هما 1 ، 2

$X=1$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}}=1$ يكافئ $x=1^3=1$

$X=2$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}}=2$ يكافئ $x=8$

منه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{1,8\}$

2) بوضع $X=x^{\frac{1}{3}}$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-1)(X-2)\rangle 0$
ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$
وبما أن الدالة $x\mapsto x^3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $x\in]-\infty,1[\cup]8,+\infty[$
و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=]-\infty,1[\cup]8,+\infty[$

3) الجملة لها معنى إذا و فقط إذا كان $x\rangle 0$ و $y\rangle 0$.
الجملة تكتب على شكل $\begin{cases}e^{x\,Ln(y)}=e^{y\,Ln(x)}\\x=y^2\end{cases}$ و هذه الأخيرة تكتب $\begin{cases}e^{y^2\,Ln(y)}=e^{y\,Ln(y^2)}\\x=y^2\end{cases}$
ومنه $\begin{cases}e^{y^2\,Ln(y)-2y\,Ln(y)}=1\\x=y^2\end{cases}$ وبالتبسيط نجد $(y^2-2y)Ln(y)=0$ و $x=y^2$.
حلول المعادلة $(y^2-2y)Ln(y)=0$ هي $(y=2)$ او $y=1$.
إذا كان $y=2$ فإن $x=4$ و إذا كان $y=1$ فإن $x=1$.
ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S=\{(4,2),(1,1)\}$.

تطبيق 47 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

f دالة معرفة بـ $f(x)=Ln(e^{2x}-e^x+1)$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) برر صحة كل من المعلومات التالية
ا) f معرفة على $\mathbb{R}$.
ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=2x+Ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.
جـ) المنحنى (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x$ كمستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$.
د) المنحنى (γ) يقبل مماسا وحيدا موازيا لمحور التراتيب.
2) ارسم (d) و (γ) و المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

1) ا) f معرفة إذا و فقط إذا كان $e^{2x}-e^x+1\rangle 0$... (1)
بوضع $X=e^x$ المتراجحة (1) تكتب $X^2-X+1\rangle 0$.
مميز X^2-X+1 هو $\Delta=-3$
$\Delta\langle 0$ منه إشارة (X^2-X+1) هي من إشارة معامل X^2 اي موجبة تماما.
بالتالي $e^{2x}-e^x+1\rangle 0$ إذن $D_f=\mathbb{R}$.

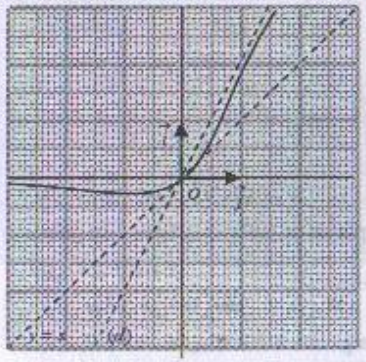
ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$f(x)=Ln\,e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})=Ln\,e^{2x}+Ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$
$=2x+Ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}Ln(1-e^{-x}+e^{-2x})=0$
إذن $y=2x$: (d) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$.

د) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{(e^{2x}-e^x+1)}$

$f'(x)=0$ تكافئ
$e^x(2e^x-1)=0$ يكافئ
$x=-Ln(2)$
إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x}-e^x)$.
بما ان $f'(x)$ ينعدم عند $-Ln(2)$ مغيرا إشارته في جوار $-Ln(2)$
فإن المنحنى (γ) له مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة $-Ln(2)$

x	$-\infty$	$-Ln(2)$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	0 ↘	$f(-Ln2)$	↗ $+\infty$



2) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0
معادلته $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
بالتعويض نجد $y=x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$
$f(-Ln(2))=Ln(\frac{3}{4})\approx-0,28$

تطبيق 48 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

f دالة معرفة بـ $f(x)=Ln(x+e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) ا) بين انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x+e^{-x}\geq 1$.
ب) استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.
2) ا) تحقق من صحة المعلومات التالية :
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=-x+Ln(1+xe^x)$
- من أجل كل $x\rangle 0$ لدينا $f(x)-Ln\,x=Ln(1+\frac{e^{-x}}{x})$

ب) عين نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

جـ) استنتج من السؤال السابق ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$.

3) ماهي نهاية $[f(x)-Ln\,x]$ عند $(+\infty)$ ماذا تستنتج ؟

4) ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.

5) ارسم (d) و (γ) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto Ln\,x$

✓ الحل

1) ا) نضع $g(x)=x+e^{-x}-1$ و نبين ان $g(x)\geq 0$

و من أجل ذلك ندرس تغيرات الدالة g.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=1-e^{-x}$

$g'(x)=0$ تكافئ $e^{-x}=1$ يكافئ $x=0$

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$ منه g متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)<0$ منه g متناقصة تماما على $]-\infty\,,0[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من جدول تغيرات نلاحظ انه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g(x)\geq 0$ أي $x+e^{-x}\geq 1$.

ب) بما ان من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$x+e^{-x}\geq 1$ فإن $x+e^{-x}\geq 0$ وهذا يعني أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2) ا) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

لدينا $f(x)=Ln\,e^{-x}(1+xe^{x})=Ln(e^{-x})+Ln(1+xe^{x})=-x+Ln(1+xe^{x})$

من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

منه $f(x)-Ln\,x=Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+Ln(1+xe^{x})\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\,(x+e^{-x})=+\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty} Ln(1+xe^{x})=0$

و منه $y=-x$: (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ لـ (γ)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-Ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right)=0$

نستنتج أنه بجوار $(+\infty)$ المنحني (Γ) الممثل للدالة Ln مقارب للمنحني (γ).

4) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

إذا كان $x<0$

فإن $f'(x)<0$

و منه f متزايدة تماما

على $]-\infty\,,0]$.

إذا كان $x<0$

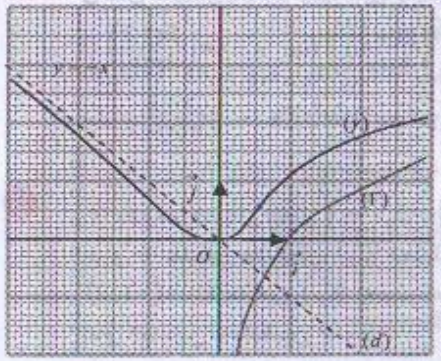
فإن $f'(x)<0$

و منه f متناقصة تماما

على $[0\,,-\infty[$.

المنحني (γ) يقع تحت (d)

من أجل كل $x<0$.



تمارين و مسائل

1 - عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Ln(2x+1)$ ، ب) $Ln(-x^2)$ ، جـ) $Ln(x^2+4x-5)$.

د) $Ln(x^2-1)-Ln(2x+1)$ ، و) $Ln(2+x)(x-1)$ ، ي) $Ln(x^2+1)+Ln(x^2-1)$

2 - في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة ذات معنى:

أ) $Ln\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)$ ، ب) $Ln\left(\left|\frac{2x+3}{1-x}\right|\right)$ ، جـ) $Ln\left(|x^2-1|-1\right)$

د) $\frac{x+1}{Ln(x)-2}$ ، و) $\frac{x}{[Ln\,x]^2+3\,Ln\,x-2}$ ، ي) $Ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ ، هـ) $\sqrt{Ln\,x}$

3 - f دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=ax^2+bx+Ln(x+2)$ مع a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

$A(-1,2)$ نقطة من (C_f) بحيث المماس عندها يوازي مستقيم ميله 2

عين العددين الحقيقيين a و b.

4 - (γ) المنحنى البياني للدالة Ln في معلم متعامد و متجانس. M نقطة من (γ) فاصلتها m.

1) أوجد بدلالة m معادلة المماس T للمنحنى (γ) عند النقطة M.

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي $m>0$ ، المماس T يقطع محور التراتيب في نقطة K إحداثييها $(0\ ,\ Ln(m)-1)$.

ب) استنتج أنه إذا كانت H المسقط العمودي لـ M على محور التراتيب فإن $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$

جـ) أعط عندئذ طريقة بسيطة لإنشاء المماس للمنحنى (γ) عند النقطة M.

5 - عين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة:

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln(x)}$ ، ب) $f(x)=x+Ln(x+1)$ ، جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right)$

د) $f(x)=Ln(x^2+3x)$ ، و) $f(x)=Ln(|x-1|)$ ، ن) $f(x)=Ln\left(\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\right)$

6 - حل المعادلات التالية:

أ) $Ln(-x+3)=2\,Ln\,2$ ، ب) $2\,Ln\,x=Ln(-3x+4)$

جـ) $Ln(x^2-4x)=Ln(x+4)$ ، د) $Ln(x^2-1)=0$ ، هـ) $Ln(x^2-1)=-1$

و) $Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2$ ، ن) $Ln(x+2)+Ln(x-2)=Ln(21)$

7 - حل المتراجحات التالية:

أ) $Ln(x)-3\geq 0$ ، ب) $Ln(x)>Ln(2-x)$ ، جـ) $Ln(2x-6)>2$

د) $Ln(x+3)+2<0$ ، هـ) $Ln\left(\frac{x+2}{x}\right)>1$ ، و) $Ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)<0$

ن) $Ln(3x-1)\leq Ln(x-2)$ ، ي) $Ln(5x)\leq Ln(x^2-x)$

8 - في كل حالة من الحالات التالية عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f معرفة:

أ) $f(x)=\sqrt{Ln(x)-2}$ ، ب) $f(x)=\sqrt{Ln(2x)-5}$

جـ) $f(x)=\frac{1}{2\,Ln(x-1)+3}$ ، د) $f(x)=\frac{x}{Ln(x^2-1)-3}$

هـ) $f(x)=\frac{Ln(2x-1)}{2\,Ln\,x-6}$ ، و) $f(x)=Ln(3-Ln\,x)$

ن) $f(x)=Ln(Ln(x))$

9 - أ) حل الجملة $\begin{cases}3x+5y=21\\4x+7y=29\end{cases}$ ثم استنتج حل الجملة:

$\begin{cases}3\,Ln(x)+4\,Ln(y)=21\\4\,Ln(x)+7\,Ln(y)=29\end{cases}$

10 - حل الجملتين التاليتين:

1) $\begin{cases}x-y=8\\Ln(x)-Ln(y)=2\,Ln(3)\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=12\\Ln(x)+Ln(y)=3\,Ln(3)\end{cases}$

11 - ليكن $P(x)$ كثير حدود معرف بـ $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) بين أن $P(1)=0$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء عوامل ثم حل المعادلة $P(x)=0$.

2) حل المعادلة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6=0$

3) حل المتراجحة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6\geq 0$

12 - (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ $U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1) احسب نهاية (U_n)

2) نضع $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

13 - في كل حالة من الحالات التالية ادرس نهاية f عند المكان المعطى :

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$ عند 0

جـ) $f(x)=x+1-Ln(x)$ عند $(+\infty)$ ، د) $f(x)=\frac{1}{x^2}-Ln\,x$ عند $+\infty$ و 0

هـ) $f(x)=x+x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ ، و) $f(x)=\frac{x\,Ln\,x}{x+2}$ عند 0

ي) $f(x)=1+x^2-x^2\,Ln\,x$ عند $+\infty$ ، ن) $f(x)=\frac{Ln(x)-1}{x-e}$ عند e

14 - ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln\,x}$ ، $I=]1,+\infty[$

ب) $f(x)=x(2-Ln\,x)$ ، $I=]0,+\infty[$

جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I=]-\infty,-3[$

د) $f(x)=\frac{Ln(x)-3}{x}$ ، $I=]e^3,+\infty[$

هـ) $f(x)=\frac{x+2}{Ln\,x}$ ، $I=]1,+\infty[$

و) $f(x)=x+2+Ln\,x-Ln(x^2+1)$ ، $I=]0,+\infty[$

ن) $f(x)=x^2+x-x\,Ln\,x$ ، $I=]0,+\infty[$

ي) $f(x)=\sqrt{x}\,Ln(x)+1$ ، $I=]0,+\infty[$

ع) $f(x)=x^2-Ln(x^2+1)$ ، $I=\mathbb{R}$

15 - حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=0$

ب) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=Ln\,8$

جـ) $Ln|2x+7|+Ln|x+1|=2\,Ln|x+2|$

د) $Ln(x-2)-Ln(x)=Ln(\alpha)$

16 - حل المتراجحات و الجمل التالية :

1) $3(Ln\,x)^2-4\,Ln\,x-3\geq 0$ ، 2) $2(Ln|x|)^2+3\,Ln(x^2)-5<0$

3) $\begin{cases}Ln(x)\,Ln(y)=6\\ Ln(x\,y)=5\end{cases}$ ، 4) $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ Ln(x\,y)=\frac{1}{2}Ln(3)\end{cases}$

17 - الدوال التالية معرفة على $I=]0,+\infty[$ ادرس تغيرات كل منها ثم ارسم منحناها البياني

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، ب) $f(x)=(Ln\,x)^2+1$ ، جـ) $f(x)=\frac{2-Ln\,x}{x}$

د) $f(x)=x+1-Ln\,x$ ، هـ) $f(x)=x^2-x+1+3\,Ln\,x$

18 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=\frac{1}{Ln\,x}$

ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني.

19 - f و g دالتان معرفتان على المجال $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+2)$ و $g(x)=\frac{x+1}{x+2}$. (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين في معلم متعامد و متجانس.

1) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ يكون $g(x)\leq f(x)$

2) برهن أن (C_f) و (C_g) لهما مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$ ثم ارسم (C_f) و (C_g) .

20 - f دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$.

1) برهن أن الدالة f متزايدة تماما على I

2) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$

ب) عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d).

21 - نعتبر الدالة h المعرفة بالعبارة $h(x)=x^2+1-Ln\,x$

1) ادرس تغيرات الدالة h ثم بين أن $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ و استنتج إشارة $h(x)$

2) لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{Ln\,x}{x}$

أ) احسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ على $]0,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـ) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و عند الصفر ثم شكل جدول تغيرات f .

3) 1) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d).

22 - f دالة معرفة على $I=]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln(x^2-4)$

1) برهن أن f متزايدة تماما على I

2) 1) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α في المجال I

ب) عين حصرا لـ α بتقريب $0,1$.

23 - f دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ).

2) لتكن M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 نقط من (γ).

M_1 نقطة تقاطع (γ) مع $(x'x)$.

M_2 نقطة من (γ) بحيث المماس عندها يمر من المبدأ.

M_3 هي النقطة التي عندها المماس يوازي $(x'x)$.

M_4 هي النقطة التي عندها المشتق الثاني لـ f ينعدم.

أ) احسب فواصل النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 .

ب) بين أن هذه الفواصل تمثل متتالية هندسية.

24 - f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{Ln\,x}{x^2}$. و (γ) تمثيلها البياني

1) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

2) 1) A نقطة من (γ) ذات الفاصلة 1 ، أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند A

ب) ارسم (T) ثم (γ).

3) M نقطة من (γ) فاصلتها u . بين أن المماس (Tu) لـ (γ) عند النقطة M يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذا و فقط إذا كان $u^3-1+2\,Ln(u)=0$... (I)

4) بعد حل المعادلة (I) بين أن النقطة A هي النقطة الوحيدة من (γ) المماس فيها يكون موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

25 - f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $x>0$ ؛ $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\left(Ln(x)-\frac{3}{2}\right) \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) أ) ما هي نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ لما x يؤول 0

ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

جـ) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

2) (γ) المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس وحدة الطول 2cm.

أ) أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) نريد في هذا السؤال دراسة الوضعية النسبية لـ (γ) و (T) .

لتكن h دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$.

ادرس إشارة $h'(x)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $]0,+\infty[$.

3) ارسم (T) و المماسات عند نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل و كذا (γ).

26 - f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^2+x-\frac{1+Ln\,x}{x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد.

1) g دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=2x^3+x^2+Ln\,x$.

ادرس تغيرات g على I ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أوجد العدد الطبيعي p بحيث $(P+1)\ 10^{-2} \geq \alpha \geq P\ 10^{-2}$

2) عين نهاية f عند أطراف I .

أ) بين أنه من أجل كل x من I يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.

ب) h دالة معرفة على I بالعبارة $h(x)=x^2+x$ و (p) منحناها البياني.

ما هي نهاية $f(x)-h(x)$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (γ) و (p).

ارسم (p) و (γ).

27 - **I**) g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-Ln\,x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0,+\infty[$ ثم أعط حصرا لـ α بتقريب 0,01.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{2\,Ln\,x}{x^2+x}$ و ليكن (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس نهاية f عند الصفر و $(+\infty)$.

2) بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ يكون $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$

ثم استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

4) باستعمال السؤال 2) من 1) بين أن $Ln(\alpha)=\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ و $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم ارسم (γ)

28 - k عدد حقيقي، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0,1[$ بـ $f_k(x)=x(Lnx)^2+kx$

و (γ_k) منحناها البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

I) نضع $k=0$.

1) عين اتجاه تغير الدالة f_0.

2) أ) احسب $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{Lnu}{\sqrt{u}}$ ثم $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(Lnu)^2}{u}$

ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}x(Lnx)^2=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0}f_0(x)$.

جـ) بوضع $f_0(0)=0$ هل الدالة f_0 المعرفة بهذا الشكل قابلة للاشتقاق عند الصفر؟

د) عين نهاية النسبة $\frac{f_0(x)}{x}$ لما x يؤول إلى الصفر ثم استنتج معادلة المماس عند النقطة $O(0,0)$ للمنحني (γ_0) ثم ارسم (γ_0).

II) 1) أ) احسب $f_k'(x)$ من أجل $x\in]0,1]$.

ب) A_k نقطة من (γ_k) فاصلتها 1 بين أن المماس (T_k) لـ (γ_k) عند A_k هو (OA_k)

2) أ) ادرس نهاية f_k عند الصفر و هذا بأخذ $f_k(0)=0$.

ب) أوجد معادلة المماس لـ (γ_k) عند النقطة O.

29 - **I)** f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{xLnx}{x+1}$

1) لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=Ln(x)+x+1$.

ادرس تغيرات g ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ لها حلا وحيدا β بحيث $0,27\le\beta\le 0,28$.

2) أ) من أجل كل $x>0$ أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ مستنتجا تغيرات f.

ب) عين نهاية الدالة f عند أطراف $]0,+\infty[$.

II) نعتبر المعادلة (أ) ... $f(x)=n$ و n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين أن المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا α_n.

2) أ) بين أن $f(e^n)\le n$ ثم استنتج أن $\alpha_n\ge e^n$

ب) بين أن العلاقة $f(\alpha_n)=n$ تكتب على الشكل $Ln(\frac{\alpha_n}{e^n})=\frac{n}{\alpha_n}$ (2)

ثم استنتج باستعمال السؤال (أ) نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$ لما n يؤول إلى $(+\infty)$

3) نكتب $\alpha_n=e^n(1+\varepsilon_n)$ مع $\varepsilon_n\ge 0$.

أ) باستعمال المساواة (2) اكتب $(1+\varepsilon_n)Ln(1+\varepsilon_n)$ بدلالة n.

ب) بين أنه من أجل $t\ge 0$ يكون $0\le(1+t)Ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$

جـ) استنتج من (أ) و (ب) أنه من أجل كل $n\ge 1$ يكون

$$\varepsilon_n\le ne^{-n}\le\varepsilon_n+\frac{(\varepsilon_n)^2}{2} \quad ... \quad (3).$$

د) من (2) و (3) عين نهاية $e^n+n-\alpha_n$ لما n يؤول إلى $(+\infty)$.

30 - (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=0$ و من أجل $n\ge 0$ يكون $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$.

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 و عبر عن هذه الحدود بواسطة كسر غير قابل للاختزال.

2) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية بالنسبة إلى الحدود الأربعة الأولى لـ (V_n) المعرفة بـ $V_n=\frac{n}{n+1}$.

3) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل $n\ge 0$ يكون $U_n=V_n$.

4) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n=Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

أ) بين أن $W_1+W_2+W_3=-Ln(4)$.

ب) S_n المجموع المعرف بـ $S_n=W_1+W_2+...+W_n$.

اكتب S_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

31 - نريد دراسة تقارب المتتالية $S_n=1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n-1}-Ln\,n$

1) ادرس تغيرات الدالتين f و g المعرفتين على $]1,+\infty[$ بـ:

$$f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

ثم استنتج أن $\frac{1}{x+1}\le Ln(x+1)-Ln(x)\le\frac{1}{x}$

2) نضع $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

أ) تحقق أنه من أجل $n\ge 1$ يكون $U_{n+1}-1\le Ln(n+1)\le U_n$

ب) استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

3) أ) لتكن الدالة K المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $K(x)=\frac{1}{x}-Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

فسر هندسيا العدد S_n حيث $S_n=U_{n-1}-Ln\,n$.

ب) من السؤال (1) استنتج أنه من أجل كل $n\ge 1$ يكون $0\le K(n)\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

جـ) تحقق أنه من أجل كل $n\ge 2$ يكون $S_n=K(1)+K(2)+....+K(n-1)$.

ثم استنتج أن المتتالية (S_n) متزايدة ومن أجل كل $n\geq 2$ يكون $K(1)\langle S_n\langle 1-\frac{1}{n}$.

د) استنتج من جـ) أن (S_n) متقاربة نحو ℓ يطلب تعيينه.

32 - بعد قياس طول أطفال أعمارهم تتراوح ما بين 3 أشهر و 6 سنوات نمذجنا العلاقة بين السن x بالسنوات و الطول $K(x)$ (cm) بالدالة K التالية :

$K(x)=71,23+6,13x+8,7\,Log\,x$

أ) ادرس تغيرات الدالة K على المجال $[6\,,\,0,25]$.

ب) ما هي الزيادة في الطول ما بين سنة و سنتين ؟

جـ) ارسم المنحنى البياني للدالة K في المجال $[6\,,\,0,25]$.

33 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $\begin{cases} f(x)=(|x|)^x & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) بين أن هذه الدالة مستمرة على IR و قابلة للاشتقاق على $IR-\{0\}$.

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

34 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR_+^* بـ $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) عين معادلة المماس (T) لـ (γ) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ارسم (γ) و (T)

35 - n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدوال المعرفة على IR بـ $f_n(x)=x^n e^{-x}$ و (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

I) 1) ادرس تغيرات الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 مع إعطاء العدد المشتق عند الصفر.

2) بين أن جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعينها.

3) ادرس تغيرات الدوال f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.

4) قارن بين الوضع النسبي لـ (γ_n) و (γ_{n+1}) على $[0\,,+\infty[$ و (γ_n) و (γ_{n+2}) على $]-\infty\,,0[$ و مثل عندئذ (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3) في نفس المعلم.

II) 1) من أجل كل $x\rangle 0$ نضع $u(x)=x\,Ln(x)-x$ ادرس تغيرات u.

2) g دالة معرفة على $[0\,,+\infty[$ بـ $\begin{cases} g(x)=e^{u(x)} & ,\ x\rangle 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

أ) تحقق أنه من أجل كل $x\rangle 0$ يكون $\frac{g(x)-1}{x}=\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}\times(Ln(x)-1)$.

ب) بين أن الدالة g مستمرة عند الصفر و لكن غير قابل للاشتقاق عند 0.

جـ) ادرس تغيرات g.

د) احسب $g(e)$ ثم حل المتراجحة $g(x)\geq 1$ في المجال $]0\,,+\infty[$.

3) من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ نسمي M_n النقطة ذات إحداثيتي $(n\ ,\ f_n(n))$.

أ) تحقق أن النقطة M_n نقطة من المنحنى البياني للدالة g ثم ارسم هذا المنحنى.

4) عين حسب قيم n عدد حلول المعادلة $f_n(x)=1$ على IR.

36 - n عدد طبيعي و f_n دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $f_n(x)=x^{n+\frac{1}{2}}\times(1-x)^{\frac{1}{2}}$ ، (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين أن (γ_0) نصف دائرة نصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ و مركزها ω يطلب تعيينه.

2) في هذا السؤال نفرض أن $n\geq 1$

أ) من أجل كل x من $]0,1[$ احسب $f_n'(x)$ مبينا أن $f_n'(x)$ و $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x\right]$ لهما نفس الإشارة.

ب) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند الصفر و الواحد. شكل جدول تغيرات f_n.

3) أ) ادرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ لما $1\geq x\geq 0$ و $n\geq 1$

ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيات (γ_n) و (γ_{n+1}).

جـ) ارسم في المعلم $\left(o\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ المنحنيات (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_0)

الدرس 6

النهَايَاتُ والمُتتَالِيَاتُ

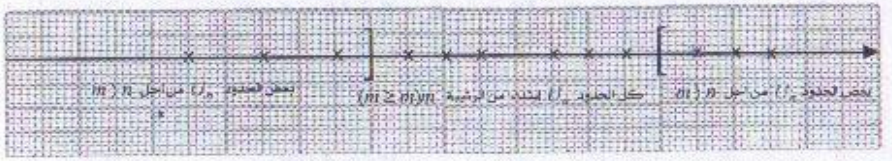
1 - نهاية متتالية (تذكير)

1 - 1 نهاية حقيقية لمتتالية عددية

تعريف

نقول أن العدد الحقيقي ℓ نهاية لمتتالية (U_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ أو $\lim U_n = \ell$ و في هذه الحالة نقول ان المتتالية (U_n) متقاربة.



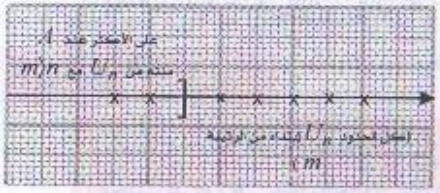
ملاحظة

1) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة
2) إذا كانت (U_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة)
3) كل متتالية حدودها موجبة لها نهاية موجبة أو معدومة.

مثال - ◆

المتتاليات المعرفة بـ $U_n = \frac{1}{n}$ ، $V_n = \frac{1}{n^3}$ ، $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متتاليات متقاربة نحو الصفر لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Vn = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

2 - 1 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية



نقول ان متتالية (U_n) تقبل نهاية $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]A, +\infty[$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة و نكتب :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

ويعني ذلك أن حدود المتتالية (U_n) تنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي A مهما كان كبيرا.

ملاحظة

الكتابة $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ تعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]-\infty, A[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من رتبة معينة.

مثال - ◆

المتتاليات $U_n = n^2$ ، $V_n = n^3$ ، $W_n = \sqrt{n}$ ، $S_n = \sqrt{n+1}$ متتالية لها النهاية $(+\infty)$ و بالتالي فهي متباعدة.

3 - 1 دراسة تقارب متتالية هندسية

دراسة تقارب متتالية هندسية كيفية ذات الحد العام aq^n يقودنا إلى دراسة تقارب المتتالية الهندسية ذات الحد العام q^n .

مبرهنة

q عدد حقيقي

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- إذا كان $q = 0$ أو $q = 1$ فإن المتتالية q^n ثابتة
- إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة.

مثال - ◆

1) لتكن $U_n = 5\left(\frac{-3}{4}\right)^n$

بما ان $-1 < \frac{-3}{4} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

2) لتكن $V_n = 2\times 3^n$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ و منه (V_n) متتالية متباعدة.

تمرين تدريبي ❶

(U_n) متتالية معرفة بالعبارة $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ نهايتها 2 أوجد عدد طبيعي m بحيث لما $n > m$ كل الحدود U_n تنتمي إلى المجال $I =]1{,}99\,;2{,}01[$

✓ الحل

الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1{,}99\,;2{,}01[$ يعني ان $1.99 < \frac{2n+3}{n+2} < 2.01$ وبطرح 2 من حدود هذه الأخيرة نجد $-0.01 < \frac{2n+3}{n+2} - 2 < 0.01$ اي $-0.01 < \frac{-1}{n+2} < 0.01$ وبالضرب في (-1) نجد $-10^{-2} < \frac{1}{n+2} < 10^{-2}$ وبالضرب في $10^2(n+2)$ نجد

(I) $n+2 > 10^2 > -(n+2)$

المتباينة $10^2 > -(n+2)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n إذن المتباينة المضاعفة (I) تكافئ $n+2 > 10^2$ اي $n > 98$ منه نستنتج أن $m = 98$

بالتالي المجال $]1.99.2.01[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة 98 .

تمرين تدريبي ❷

ادرس تقارب المتتاليات $U_n = \frac{3}{4^n}$ ، $V_n = 5(\sqrt{2})^n$ ، $W_n = \frac{(-4)^n}{5}$ ، $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

✓ الحل

نلاحظ أن (U_n) ، (V_n) ، (W_n) متتاليات هندسية

- بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ و منه $\lim U_n = 0$ إذن (U_n) متقاربة نحو الصفر.

- بما أن $1 < \sqrt{2}$ فإن $\lim(\sqrt{2})^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ إذن (V_n) متتالية متباعدة.

- بما ان $-4 \le -1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(-4)^n$ غير موجودة و منه المتتالية (W_n) متباعدة.

- (U_n) متتالية هندسية بالتالي S_n مجموع n حد الأولى المتعاقبة من متتالية (U_n) حدها الأول $U_0 = 3$ و أساسها $\frac{1}{4}$.

إذن $S_n = 3\times\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = 4\left(1-(\frac{1}{4})^n\right)$

- بما ان $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{4})^n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ و منه المتتالية (S_n) متقاربة نحو العدد 4.

❷ - نظريات حول النهايات

2 - 1 المتتاليات من الشكل $U_n = f(n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال $]a\,;+\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = f(n)$

و ℓ يمثل عددا حقيقيا او $+\infty$ او $-\infty$

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

مثال - ◆

$U_n = \frac{2}{n+1}$ ، الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نهايتها الصفر لما $x\to+\infty$

و عليه فالمتتالية (U_n) نهايتها 0 .

2 - 2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(V_n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و كل حدود متتالية (V_n) تنتمي إلى I .

α ، β عددان حقيقيان أو يمثلان $+\infty$ او $-\infty$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} V_n = \alpha$ و إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ فإن $\lim_{n\to+\infty} f(V_n) = \beta$

مثال - ◆

(V_n) متتالية معرفة بـ $V_n = \sqrt{3+\frac{1}{n+1}}$

بوضع $U_n = 3+\frac{1}{n+1}$ تصبح $V_n = \sqrt{U_n}$ و بالتالي $V_n = f(U_n)$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$ و $\lim_{x\to 3} f(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{3}$

نتيجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_{n+1}=f(U_n)$
إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell=f(\ell)$ (ℓ حل لـ $x=f(x)$)

الإثبات

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ و إذا كانت f مستمرة عند ℓ ($\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=f(\ell)$) في المبرهنة السابقة
تسمح لنا بالتأكيد أن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n)=f(\ell)$.
و من جهة أخرى المتتالية (U_{n+1}) نهايتها ℓ لأن حدودها هي نفس حدود المتتالية (U_n) ما عدا U_0
و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1}=f(U_n)$
فإن المتتاليتين (U_{n+1}) و $f(U_n)$ متساويتان و بالتالي لهما نفس النهاية أي $\ell=f(\ell)$

مثال - ♦

(U_n) متتالية متقاربة معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $\begin{cases}U_{n+1}=\sqrt{3+U_n}\\ u_0=2\end{cases}$
أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

✓ الحل

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{3+x}$ و منه $U_{n+1}=f(U_n)$
بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\ell$ و $\ell\in\mathbb{R}$
و بما أن f مستمرة عند ℓ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=f(\ell)$
إذن ℓ هو جذر للمعادلة $x=f(x)$.
$x=f(x)$ يكافئ $x^2-x-3=0$ و $x\geq 0$
$\Delta=(-1)^2-4(1)(-3)=13$
$\Delta>0$ و منه المعادلة $x^2-x-3=0$ لها حلان هما $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$
بما أن $x_2<0$ فإنه مرفوض و بالتالي $\ell=x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

3 - 2 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

القواعد المتعلقة بنهايات الدوال عند $(+\infty)$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى المتتاليات وخاصة نهاية الجمع و الجداء و حاصل قسمة متتاليتين .
أما بالنسبة إلى نهاية المتتالية باستعمال الحصر لدينا المبرهنات التالية:

مبرهنة ❶

(U_n) , (V_n) , (W_n) ثلاث متتاليات عددية ، ℓ عدد حقيقي.
إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $W_n\leq U_n\leq V_n$
و إذا كانت $\lim W_n=\lim V_n=\ell$
فإن $\lim U_n=\ell$

مبرهنة ❷

ℓ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $|U_n-\ell|\leq V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$

مبرهنة ❸

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان
- إذا كان من أجل كل $n\geq m$ لدينا $U_n\geq V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$
- إذا كان من أجل كل $n\geq m$ لدينا $U_n\leq V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=-\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=-\infty$

تمرين تدريبي ❶

ادرس تقارب المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n=\frac{2n+\cos n}{2n-\sin n}$

✓ الحل

- من أجل كل عدد طبيعي لدينا $-1\leq\cos n\leq 1$
إذن $-1+2n\leq 2n+\cos n\leq 1+2n$(1)
- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1\leq\sin n\leq 1$
إذن $-1+2n\leq 2n-\sin n\leq 1+2n$
و بما أن حدود التباينة المزدوجة موجبة فإنه نستنتج بالقلب
$\frac{1}{-1+2n}\geq\frac{1}{2n-\sin n}\geq\frac{1}{1+2n}$(2)
بضرب حدود التباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد ،
$\frac{1+2n}{-1+2n}\geq\frac{2n+\cos n}{2n-\sin n}\geq\frac{-1+2n}{1+2n}$
و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1+2n}{1+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2n}{-1+2n}=1$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$

تمرين تدريبي ❷

(V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_0=1$ و $V_{n+1}=\sqrt{V_n+6}$

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0\le V_n\le 3$

ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=\frac{V_n}{n+2}$

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $0\le V_n\le 3$ "

- p_0 صحيحة لأن $V_0=1$ و $0\le 1\le 3$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 0$ أي $0\le V_n\le 3$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $0\le V_{n+1}\le 3$

من الفرض لدينا $0\le V_n\le 3$ و بإضافة 6 إلى حدود هذه المتباينة نجد $6\le V_n+6\le 9$

بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{6}\le\sqrt{V_n+6}\le\sqrt{3}$ اي $0\le\sqrt{3}\le V_{n+1}\le 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .

ب) بما ان $0\le V_n\le 3$ فإن $0\le\frac{V_n}{n+2}\le\frac{3}{n+2}$

و بما ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n+2}=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n+2}=0$

و عليه فالمتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تمرين تدريبي ❸

ادرس تقارب المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة :

$V_n=3^{n+2}-5^n$

✓ الحل

المتتاليتان اللتان حداهما العام 5^n و 3^{n+2} هندسيتان اساساهما على الترتيب 5 و 3

و بما أن $1<5$ و $1<3$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=\lim\limits_{n\to+\infty}3^{n+2}=+\infty$ و بالتالي نستنتج :

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين.

V_n يكتب $V_n=3^n\left(3^2-\frac{5^n}{3^n}\right)=3^n\left(9-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$

بما أن $\frac{5}{3}>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$ و منه نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[9-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right]=-\infty$

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ فإنه حسب قاعدة نهاية جداء متتاليتين نستنتج :

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3^n\times\left(9-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)=-\infty$ و عليه (V_n) متباعدة.

❸ - تقارب المتتاليات الرتيبة

3 - 1 متتالية محدودة (من الأعلى - من الأسفل)

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى يعني انه يوجد عدد حقيقي M بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\le M$.

يسمى M عنصرا حادا من الأعلى للمتتالية (U_n)

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل يعني أنه يوجد عدد حقيقي m بحيث أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\ge m$.

يسمى m عنصرا حادا من الأسفل.

- إذا كانت (U_n) محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها محدودة.

ملاحظة

1) إذا كانت متتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد M فإن كل الأعداد الحقيقية الأكبر من M هي ايضا عناصر حادة لـ (U_n) .

نعرف بنفس الكيفية العناصر الحادة من الأسفل.

2) نفي القضية " المتتالية (U_n) غير محدودة من الأعلى " يعني انه من أجل كل عدد حقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد U_{n_0} بحيث $U_{n_0}>A$.

مثال -

1) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n=\sin n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1\le\sin n\le 1$

2) المتتالية $V_n=(-1)^n\cos n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $-1\le V_n\le 1$

3) المتتالية $W_n=-n^2$ محدودة من الأعلى لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $W_n\le 0$

3 - 2 تقارب المتتالية الرتيبة

- المتتالية (U_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n\le U_{n+1}$

- المتتالية (U_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq U_{n+1}$
- المتتالية (U_n) رتيبة إذا و فقط إذا كانت متزايدة أو إذا كانت متناقصة.

مثال - ♦

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = -n^2+n+1$
من أجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = -n^2-n+1$
إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1}-U_n = -2n$
من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $-2n \leq 0$ أي $U_{n+1}-U_n \leq 0$ و بالتالي (U_n) متناقصة.

مبرهنة ❶

1) كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى نهايتها $(+\infty)$
2) كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأسفل نهايتها $(-\infty)$

الإثبات

نثبت القسم الأول من المبرهنة (1).
لتكن (U_n) متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى:
- (U_n) غير محدودة من الأعلى هذا يعني أنه مهما يكن العدد الحقيقي A كبير بالقدر الكافي.
نستطيع أن نجد حد U_p من المتتالية (U_n) بحيث $U_p > A$ (1)
- (U_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n > p$ يكون $U_n \geq U_p$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل $n > p$ يكون $U_n > A$
و هذا يعني أنه ابتداء من الرتبة P كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى مجال $]A, +\infty[$
مما يعني أن نهاية (U_n) هي $+\infty$

مبرهنة ❷

1) كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
2) كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

الإثبات

1) بما أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \leq M$، عندئذ يوجد عدد حقيقي A و هو أصغر العناصر الحادة لـ U_n.
و عليه فكل مجال من الشكل $]A-\alpha, A+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$ يشمل على الأقل حد U_p من المتتالية (U_n).
لأنه إذا كان هذا المجال لا يشمل أي حد U_p فإن كل الحدود U_n تقع على يسار $A-\alpha$
وهذا يعني أن $A-\alpha$ عنصر حاد لـ (U_n) مما يخالف الفرض كون A هو أصغر العناصر الحادة الكبرى لـ (U_n).

و بما أن المتتالية (U_n) متزايدة و كل الحدود (U_n) أصغر من A
فإن المجال $]A-\alpha, A+\alpha[$ يشمل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة p و هذا صحيح من أجل كل α (أي من أجل كل مجال مركزه A).
إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي A.
2) نبين بنفس الطريقة أن كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة.

ملاحظة

هذه البرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب متتالية و لكن لا تعطينا قيمة نهايتها.

تمرين تدريبي ❶

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة $U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}$ و $U_0 = 1$
1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < U_n \leq 2$
2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج تقاربها واحسب نهايتها.

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$0 < U_n \leq 2$"
- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1$ و $0 < 1 \leq 2$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $0 < U_n \leq 2$
و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$
من الفرض لدينا $0 < U_n \leq 2$ و بإضافة 2 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $2 < U_n+2 \leq 4$
و بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{2} < \sqrt{U_n+2} \leq 2$ أي $0 < \sqrt{2} < U_{n+1} \leq 2$
و منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.
من المتباينة $0 < U_n \leq 2$ نستنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى.

2) (U_n) متزايدة هذا يعني انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1}-U_n \geq 0$.

$$U_{n+1}-U_n = \sqrt{2+U_n}-U_n = \frac{(\sqrt{2+U_n}-U_n)(\sqrt{2+U_n}+U_n)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$$

$$= \frac{2+U_n-U^2_n}{\sqrt{2+U_n}+U_n} = \frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n}+U_n}$$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ فإن $U_n+1 > 0$ و $U_n-2 \leq 0$ و بالتالي:

$\frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{\sqrt{2+U_n}+U_n} \geq 0$ أي $U_{n+1}-U_n \geq 0$ مما يدل على أن (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

- بما أن (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ.
ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = \sqrt{2+x}$

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 2 = 0$

يكافئ $x = 2$ أو $x = -1$

وبما ان حدود المتتالية موجبة فإن نهايتها موجبة و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

تمرين تدريبي ❷

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ و بالعلاقة $U_{n+1} = \frac{U_n}{3 + 2U_n}$

1) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f : x \to \frac{x}{3+2x}$ على $[0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم استنتج نهايتها.

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$U_n > 0$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة اي $U_n > 0$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ فرضا

و بضرب طرفي المتباينة في 2 نجد $2U_n > 0$ و بإضافة 3 نجد $3 + 2U_n > 3 > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ منه p_{n+1} صحيحة

و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ لأن $[0, +\infty[\subset D_f$

و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \frac{3}{(2+3x)^2}$ إذن $f'(x) > 0$

وبالتالي f دالة متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

إذا كان $U_{n+1} = f(U_n)$ و f متزايدة فإن المتتالية (U_n) رتيبة لكن $U_1 = \frac{2}{7}$ و

$U_1 - U_0 \leq 0$

إذن يمكن أن نخمن أن (U_n) متناقصة.

نبرهن بالتراجع أن (U_n) متناقصة.

نسمي p_n الخاصية "$U_{n+1} \leq U_n$"

- من أجل $n = 0$: p_0 صحيحة لأن $U_1 - U_0 \leq 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي $U_{n+1} \leq U_n$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من الفرض لدينا $U_{n+1} \leq U_n$

و بما ان f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

اي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ و منه p_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n تكون p_n صحيحة.

3) بما ان (U_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

حيث ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$

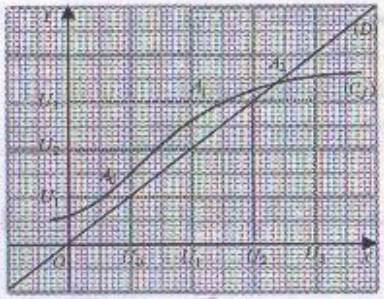
$x = f(x)$ تكافئ $x = \frac{x}{3+2x}$

يكافئ $(x = 0)$ أو $(x = -1)$

بما ان $x \geq 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

❹ - متتاليات من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

4 - 1 التمثيل البياني للمتتالية (U_n)



(U_n) متتالية حدها الأول U_0 و $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس.

نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل

ثم نعلم النقطة A_0 من (C_f) ذات الفاصلة U_0 .

و الترتيبة $U_1 = f(U_0)$

نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1

هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $(D) : y = x$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = U_1$.

النقطة A_1 ذات الفاصلة U_1 و الترتيبة $U_2 = f(U_1)$ الناتجة من تقاطع $x = U_1$ مع (C_f)

نعلم العدد U_2 على محور الفواصل كما في الحالة السابقة و هكذا دواليك.

مثال - ◆

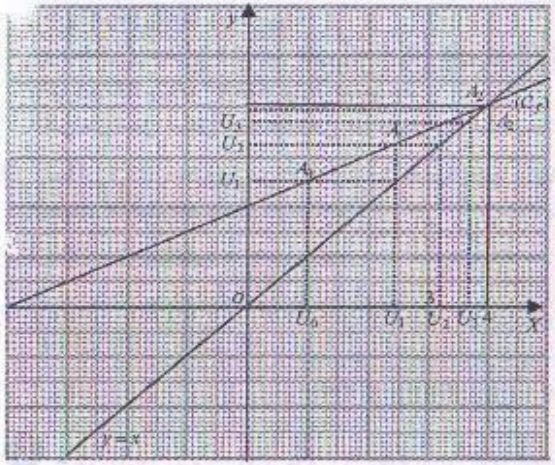
مثل بيانيا الحدود U_n, U_3, U_2, U_1, U_0 ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير و نهاية

المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$ و $U_0 = 1$

✓ الحل

نرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين (d) و (Δ) ذوي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$ و $y = x$

على الترتيب.



- نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل ثم نعلم النقطة A_0 من (d) ذات الفاصلة U_0 و ترتيبتها $U_1=f(U_0)$ الناتجة من تقاطع (d) مع المستقيم ذي المعادلة $x=U_0$.
- نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y=U_1$ مع (Δ)
- نعلم النقطة A_1 الناتجة من تقاطع المستقيم ذي المعادلة $x=U_1$ و (d).
ترتيبة النقطة A_1 هي $U_2=f(U_1)$.
- نعلم U_2 على محور الفواصل حيث U_2 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y=U_2$ مع المستقيم (Δ) و هكذا نعلم حدود المتتالية (U_n).

نلاحظ من الشكل أن الحدود U_0 , U_1 , U_2 تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (d) مع (Δ)
و نلاحظ أيضا أن المتتالية (U_n) متزايدة.
أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=4$ (لأن فاصلة نقطة التقاطع هي 4)

2 - 4 دراسة المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1}=aU_n+b$

نلاحظ أن (U_n) معرفة بالشكل $U_{n+1}=f(U_n)$ حيث $f(x)=ax+b$

• حالة $a=1$:
$U_{n+1}=U_n+b$
- إذا كان $b=0$ فإن (U_n) ثابتة
- إذا كان $b\neq 0$ فإن (U_n) متتالية حسابية أساسها b فهي متباعدة.

• حالة $a\neq 1$ و $a\neq -1$
- لحساب الحد العام للمتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة $U_{n+1}=aU_n+b$ نعرف متتالية (V_n) حيث $V_n=U_n-\alpha$ و نختار α حتى تكون (V_n) هندسية.
و دراسة تقارب المتتالية (U_n) تؤول إلى دراسة تقارب (V_n).
بما أن $a\neq 1$ فإن المستقيمين $(D):y=x$ و $(d):y=ax+b$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها α.

• في حالة $a=-1$ يكون $U_{n+1}=-U_n+b$
$U_1=-U_0+b$ ، $U_2=-U_1+b=U_0$ ، $U_3=-U_2+b=U_1$

$U_4=-U_3+b=U_0$
نلاحظ أنه إذا كان n زوجي فإن $U_n=U_0$ و إذا كان n فردي $U_n=-U_0+b$
- إذا كان $b=0$ و $U_0=0$ فإن المتتالية (U_n) معدومة
- إذا كان $U_0\neq 0$ فإن $U_n=U_0$ لما n زوجي
و $U_n=-U_0+b$ إذا كان n فردي
و بالتالي المتتالية (U_n) ليست لها نهاية. إذن فهي متباعدة.

مثال - ◆

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=3$ و $U_{n+1}=-\frac{1}{2}U_n+3$
و (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n=U_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي.
1) عين نقطة تقاطع المستقيمين $y=x$ و $y=-\frac{1}{2}x+3$ و لتكن α فاصلتها.
2) أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.
ب) أوجد نهاية (V_n) ثم استنتج نهاية (U_n) .

✓ الحل

1) لتكن $M(x,y)$ نقطة تقاطع المستقيم $(D):y=x$ مع المستقيم $(d):y=-\frac{1}{2}x+3$.
فاصلة النقطة M تحقق $-\frac{1}{2}x+3=x$ تكافئ $x=2$
إذن $\alpha=2$ و هي القيمة المطلوبة.

2) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $V_{n+1}=qV_n$
$V_{n+1}=(-\frac{1}{2}U_n+3)-2=-\frac{1}{2}(V_n+2)+3-2=-\frac{1}{2}V_n-1+3-2=-\frac{1}{2}V_n$
إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=a=-\frac{1}{2}$
ب) بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=1$
فإن $V_n=(-\frac{1}{2})^n$
و بما أن $-1<-\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$
من المساواة $V_n=U_n-2$ نجد $U_n=V_n+2$
و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=2$
إذن (U_n) متقاربة نحو 2 .

5 - المتتاليات المتجاورة

5 - 1 دراسة التقارب

مثال - ◆

في الجدول الآتي تظهر في العمودين B و C ستة حدود لمتتاليتين (U_n) و (V_n) على التوالي. في العمود A يوجد دليل كل حد

نلاحظ أن $U_0=1$ و $V_0=12$.

حجزنا

- في الخلية B_2 $=(B1+2*C_1)/3$
- في الخلية C_2 $=(B1+3*C_1)/4$
- في الخلية D_2 C_2-B_2.

	A	B	C	D
1	0	1	12	11
2	1	8.333	9.250	0.91
3	2	8.9444	9.020825	0.07638
4	3	8.995364	9.001728	0.0006365
5	4	8.9995981	9.00013775	0.00053916
6	5	8.9999578	9.000002838	0.00004503

1) أعط عبارة U_{n+1} و V_{n+1} بدلالة U_n و V_n

2) أعط تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) و (V_n).

ما هو التخمين حول نهاية (V_n-U_n) ؟

3) - لتكن (W_n) متتالية حيث $W_n=3U_n+8V_n$ بين أن (W_n) ثابتة.

- إذا فرضنا أن (U_n) و (V_n) تقتربان من نفس النهاية ℓ احسب القيمة الدقيقة لهذه النهاية باستعمال (W_n).

✓ الحل

1) من المعطيات $U_2=\frac{U_1+2V_1}{3}$ و $V_2=\frac{U_1+3V_1}{4}$

و عليه عبارة U_{n+1} و V_{n+1} تظهر بـ $U_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3}$ و $V_{n+1}=\frac{U_n+3V_n}{4}$

2) نلاحظ من الجدول أن المتتالية (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة. و نلاحظ أيضا أنه كلما كبر n فإن V_n-U_n تؤول إلى الصفر و منه يمكن أن نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$

3) إثبات أن (W_n) ثابتة

$$W_{n+1}-W_n=(3U_{n+1}+8V_{n+1})-(3U_n+8V_n)$$

$$=3\left(\frac{U_n+2V_n}{3}\right)+8\left(\frac{U_n+3V_n}{4}\right)-3U_n-8V_n=0$$

و منه المتتالية (W_n) ثابتة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $W_n=W_0=3U_0+8V_0=99$

- بما أن (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس نهاية ℓ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=3\lim_{n\to+\infty}U_n+8\lim_{n\to+\infty}V_n=3\ell+8\ell=11\ell$$

لكن $W_n=99$ إذن $11\ell=99$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=99$ $\ell=9$

5 - 2 تعريف

القول أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان يعني أن إحداهما متناقصة و الأخرى متزايدة.

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$



مثال - ◆

$U_n=2-\frac{1}{n+1}$ و $V_n=2+\frac{1}{n+1}$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+1}=0$

مبرهنة

إذا كانت المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتين فإن كلتيهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

الإثبات

لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$

- نبرهن أولا أن $V_n\geq U_n$

- لتكن المتتالية (W_n) المعرفة بـ $W_n=V_n-U_n$

- ندرس اتجاه تغير (W_n)

$$W_{n+1}-W_n=(V_{n+1}-U_{n+1})-(V_n-U_n)=(V_{n+1}-V_n)-(U_{n+1}-U_n)$$

بما أن (U_n) متزايدة فإن $U_{n+1}-U_n\geq 0$

وبما أن (V_n) متناقصة فإن $V_{n+1}-V_n\leq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (W_n) متناقصة و تقترب من الصفر.

لنبرهن بالخلف أن كل حدودها موجبة.

نفرض أن أحد حدودها W_p سالب تماما و لتكن قيمته $-a$ حيث $a>0$.

المتتالية (W_n) متناقصة إذن كل حدودها ابتداء من W_p تكون أصغر من $a-$
وبالتالي المجال $]-a\ ,\ a[$ لا يشمل كل حدود (W_n) ابتداء من رتبة معينة و عليه المتتالية (W_n) لا تؤول إلى الصفر وهذا يناقض الفرضية.
إذن كل حدود (W_n) موجبة.
ومنه نستنتج أن $V_n - U_n \geq 0$ أي $V_n \geq U_n$ من أجل كل n .
- نبين أن (U_n) و (V_n) متقاربتان
نعلم أن $V_n \geq U_n$ ولكن (V_n) متناقصة و كل حدودها أصغر من V_0 وعليه من أجل كل n
$V_0 \rangle V_n \geq U_n$ مما يفسر أن (U_n) محدودة من الأعلى.
المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة و لتكن ℓ نهايتها .
وبنفس الطريقة نبين أن (V_n) محدودة من الأسفل بـ U_0 و متناقصة
فهي إذن متقاربة نحو ℓ' .
- نبين أن $\ell = \ell'$:
نعلم أن (U_n) و (V_n) تقتربان على التوالي إلى ℓ و ℓ' و حسب القواعد العملية للنهايات نجد

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n - \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell - \ell'$$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ فإن $\ell - \ell' = 0$ أي $\ell = \ell'$

خاصية

كل عدد حقيقي يمكننا حصره بواسطة حدود متتابعة لمتتاليتين (a_n) و (b_n)
بحيث المتتالية (a_n) متزايدة و المتتالية (b_n) متناقصة و $b_n - a_n = 10^{-n}$
هذا العدد الحقيقي هو النهاية المشتركة للمتتاليتين المتقاربتين للأعداد العشرية.

الإثبات

ليكن x عدد حقيقي بحيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $a_n \rangle x \rangle b_n$
و $b_n - a_n = 10^{-n}$
إذا كانت (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$
فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان و بالتالي تقتربان إلى نفس النهاية ℓ
و بتطبيق نظرية الحصر نجد أن المتتاليتين تقتربان نحو x .

مثال - ◆

تعطي الآلة الحاسبة $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ و منه يمكننا كتابة الحصر التالي :

- $1 \rangle \sqrt{2} \rangle 2$ إذن $a_0 = 1$ مع $b_0 = 2$ و $b_0 - a_0 = 10^{-0} = 1$
- $1{,}4 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}5$ إذن $a_1 = 1{,}4$ و $b_1 = 1{,}5$ و $b_1 - a_1 = 0{,}1 = 10^{-1}$
- $1{,}41 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}42$ إذن $a_2 = 1{,}41$ و $b_2 = 1{,}42$ و $b_2 - a_2 = 0{,}01 = 10^{-2}$
- $1{,}414 \rangle \sqrt{2} \rangle 1{,}415$ إذن $a_2 = 1{,}414$ و $b_2 = 1{,}415$ و $b_2 - a_2 = 10^{-3}$

المتتالية 1 ، 1,4 ، 1,41 ، 1,414 ... متزايدة.
المتتالية 2 ، 1,5 ، 1,42 ، 1,415 ... متناقصة.
هاتان المتتاليتان لهما نهاية مشتركة $\sqrt{2}$.

تمرين تدريبي ❶

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :
$U_0 = 2$ ، $V_0 = 3$ ، $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$ ، $V_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}$
1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_n - U_n \rangle 0$
2) بين أن المتتالية (W_n) المعرفة بـ $W_n = V_n - U_n$ هي متتالية هندسية .
3) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان.
4) احسب $U_{n+1} + V_{n+1}$ بدلالة $U_n + V_n$ ثم ماذا يمكن القول عن المتتالية (X_n) المعرفة بـ $X_n = U_n + V_n$ ثم استنتج النهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n).

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $V_n - U_n \rangle 0$ "
- p_0 صحيحة لأن $V_0 - U_0 = 3 - 2 = 1$ و $1 \rangle 0$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $V_n - U_n \rangle 0$
و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(2U_n + 3V_n) - (3U_n + 2V_n)}{5} = \frac{1}{5}(V_n - U_n)$$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} \rangle 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

2) (W_n) متتالية هندسية اساسها q يكافئ $W_{n+1} = qW_n$

$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{5}(V_n - U_n) = \frac{1}{5}W_n$ إذن (W_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{5}$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2V_n}{5} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{5} = \frac{2}{5}W_n$

$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2U_n - 2V_n}{5} = -\frac{2}{5}W_n$

بما أن $W_n = 1 \times (\frac{1}{5})^n \rangle 0$ فإن $U_{n+1} - U_n \rangle 0$ و $V_{n+1} - V_n \langle 0$

مما يدل على أن (U_n) متزايدة و أن (V_n) متناقصة.

$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و بما أن $W_n = V_n - U_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

إذن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و بالتالي فهما متقاربتان.

4) $U_{n+1}+V_{n+1} = \frac{5U_n+5V_n}{5} = U_n+V_n$

إذن المتتالية (X_n) ثابتة و عليه فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = U_0+V_0 = 5$

و من جهة اخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell+\ell = 2\ell$

إذن $2\ell = 5$ منه $\ell = \frac{5}{2}$

6 - حصر مقادير باستعمال المتتاليات المتجاورة

لتحديد مقدار مجهول S (مساحة ، طول ، حجم ، عدد ...) يتحتم علينا إيجاد حصر اكثر فاكثر دقة لـ S بمقادير معلومة.

في المرحلة الأولى نحصل على $V_0 < S < U_0$

و في المرحلة الثانية $V_0 < V_1 < S < U_1 < U_0$

و في المرحلة n نحصل على $V_0 < V_1 < \dots < V_n < S < U_n < \dots < U_1 < U_0$

نعيد هذه العملية بعدد غير منته من المرات، فنحصل على متتالية (V_n) متزايدة و المتتالية (U_n) متناقصة . و متتالية الفرق $V_n - U_n$ تقترب نحو الصفر.

المجالات $[V_0, U_0]$ ، $[V_1, U_1]$ ، ، $[V_n, U_n]$ ، أطوالها تقترب من الصفر، مما يجعل المجال $[V_n, U_n]$ حصرا دقيقا لـ S .

تمرين تدريبي 1

نريد حساب قيمة مقربة للمساحة A للحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و المستقيمات التي معادلاتها هي $x=1$ و $x=2$ و $y=0$.

D هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 1سم) بحيث $1 \le x \le 2$ و $0 \le y \le f(x)$.

على محور الفواصل نعلم النقطتين A و B فاصلتيهما على التوالي 1 و 2

و ليكن n عدد طبيعي معطى حيث $n \ge 2$.

نقسم القطعة $[AB]$ إلى n قطع متقايسة و على كل قطعة نرسم مستطيلين أحد رأسيهما العلويين ينتمي إلى (C_f).

و هكذا نحصل على n مستطيل سفلي يقع تحت C_f و n مستطيل علوي كما هو موضح في الشكل ، نرمز بـ s_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات السفلية و S_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات العلوية نحصل هكذا على متتاليتين عدديتين s_n و S_n اللتان تحصران المساحة A ، أي $s_n < A < S_n$

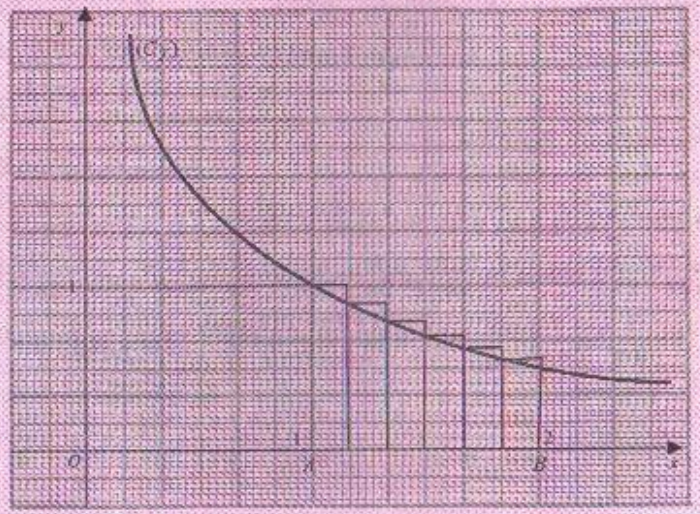
1) بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$ يكون

$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ و $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

2) بين أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة.

3) بين أن $\lim (S_n - s_n) = 0$ ماذا تستنتج ؟

4) عين أصغر عدد طبيعي p حيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} و عدد q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}.



الحل

1) - مساحة المستطيل السفلي الأول هي :

$\frac{1}{n} f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$.

مساحة المستطيل السفلي الثاني هي :

$\frac{1}{n} \times f\left(1+\frac{2}{n}\right)$ و تساوي $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+2}{n}} = \frac{1}{n+2}$

و هكذا حتى نصل إلى المستطيل السفلي الأخير الذي مساحته $\frac{1}{n} \times f(2)$ و تساوي $\frac{1}{2n}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات السفلية هي $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- مساحة المستطيل العلوي الأول هي :

$f(1) \times \frac{1}{n}$ و تساوي $\frac{1}{n}$

مساحة المستطيل العلوي الثاني هي :

$f\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n}$ و تساوي $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{n+1}{n}}$

مساحة المستطيل العلوي الأخير هي :

$f\left(2-\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n}$ و تساوي $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{2n-1}{n}}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات العلوية هي :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

2) - إثبات أن (s_n) متناقصة.

$$s_{n+1} - s_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n+1+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

- إثبات أن (S_n) متزايدة.

$$S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

$S_n > 0$ ومنه فإن (S_n) متزايدة.

3) بما أن $S_n - s_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0$

بما أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0$ فإن (S_n) و (s_n) متتاليتان متجاورتان و بالتالي لهما نفس النهاية ℓ و حسب نظرية الحصر فإن $A = \ell$

4) تعيين p بحيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}.

s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} هذا معناه أن (1) $|s_p - A| < 10^{-2}$

و بما أن (s_n) متزايدة تماما فإن $|s_{p+1} - A| < 10^{-2}$

و لدينا $|s_{p+1} - s_p| = |(s_{p+1} - A) - (s_p - A)|$

لكن $|s_p - A| + |s_{p+1} - A| \leq |(s_{p+1} - A) - (s_p - A)|$

اي $|s_{p+1} - s_p| \leq |(s_{p+1} - A)| + |s_p - A| < 10^{-2} + 10^{-2}$

ومنه نجد $|s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2}$

$|s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2}$ يكافئ $\frac{1}{2(p+1)(2p+1)} < \frac{2}{10}$ يكافئ $p \in]2.79.+\infty[$

و بما ان p عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2 فإن أصغر قيمة ممكنة لـ p هي 3 .

و في هذه الحالة تكون القيمة المقربة بالنقصان لـ A إلى 10^{-2} هي $s_3 \approx 0.61$

- تعيين q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}

بنفس الطريقة نجد $|S_{q+1} - S_q| < 2 \times 10^{-2}$

و منه نجد $\frac{1}{2q(2q+1)} < \frac{2}{10}$ و بالتبسيط نجد $2q^2 + q - 25 > 0$

و عليه $p \in]3,29.+\infty[$

إذن أصغر قيمة لـ q هي $q = 4$

إذن S_4 هي قيمة مقربة بالزيادة لـ A إلى 10^{-2}

$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \approx 0.75$ إذن $0,61 < A < 0,75$

العدد A هو عدد شهير، و هو اللوغاريتم النيبري لـ 2 .



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 نهاية المتتاليات

1) المتتالية (U_n) معرفة من أجل كل $n \geq 2$ بـ $U_n = \frac{2n+1}{n-1}$ نهايتها 2 .
أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 \ ; \ 2,02[$

2) المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2\sqrt{n}$
نهايتها $(+\infty)$. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن V_n تنتمي إلى المجال $]10^5 \ ; \ +\infty[$

✓ الحل

1) الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 \ ; \ 2,02[$ يعني أن $1,98 < \frac{2n+1}{n-1} < 2,02$

و بطرح (2) من حدود هذه الأخيرة نجد $-0,02 < \frac{3}{n-1} < 0,02$

وبالضرب في $10^2(n-1)$ نجد $-2(n-1) < 3 < 2(n-1)$ (I)

المتباينة $-2(n-1) < 3$ دوما محققة ومنه المتباينة (I) تكافئ $3 < 2(n-1)$

$3 < 2(n-1)$ تكافئ $5 < 2n$ تكافئ $n > \frac{5}{2}$ ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 3 .

2) الحدود V_n تنتمي إلى $]10^5 \ ; \ +\infty[$ هذا يعني $n^2\sqrt{n} > 10^5$ أي $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$

$n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ يكافئ $(\sqrt{n})^5 > 10^5$ يكافئ $\sqrt{n} > 10$ يكافئ $n > 100$

ومنه قيمة n المطلوبة هي 101 .

تطبيق 2 حصر متتالية - نهاية متتالية باستعمال نظرية الحصر

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $U_n = (\frac{n}{10}-1)^n$

1) احسب $U_1 \ , \ U_2 \ , \ U_3 \ , \ U_4$

2) بين أنه إذا كان $n > 25$ فإن $U_n > (\frac{3}{2})^n$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

✓ الحل

1) $u_1 = (\frac{1}{10}-1)^1 = \frac{-9}{10}$ ، $u_2 = (\frac{2}{10}-1)^2 = \frac{64}{100}$

$u_3 = (\frac{3}{10}-1)^3 = \frac{-343}{100}$ ، $u_4 = \frac{81}{625}$

2) إذا كان $n > 25$ فإن $\frac{n}{10}-1 > \frac{3}{2}$ ومنه $(\frac{n}{10}-1)^n > (\frac{3}{2})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{3}{2})^n = +\infty$ لأن $(\frac{3}{2})^n$ حد عام لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2} > 1$

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

تطبيق 3 نهاية متتالية

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) محددا القاعدة المستعملة

أ) $U_n = \frac{5n+2}{3n-2}$ ، ب) $U_n = 3n - \frac{1}{3n+2}$ ، جـ) $U_n = \frac{3n^2+5n+1}{n^2+n+1}$

د) $U_n = \cos(\frac{n\pi+1}{2n+1})$ ، هـ) $U_n = \sqrt{\frac{3n-1}{n+1}}$

و) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$ ، ي) $U_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+1}$

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$ (نهاية دالة ناطقة).

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{3n+2} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ (قاعدة مجموع متتاليتين)

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3$ (نهاية دالة ناطقة).

د) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{3n-1}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3$ و f مستمرة عند 3

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = f(3) = \sqrt{3}$ (نهاية متتالية (U_n) من الشكل $U_n = f(V_n)$)

هـ) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ و $f(x) = \cos x$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$ و الدالة f مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

و) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{(\sqrt{n^2+3n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = 0$$

ي) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{0}{1} = 0$$

تطبيق 4 حساب نهاية متتالية بالاعتماد على متتالية حسابية

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_0 = 2$

و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ و $V_n = \frac{3}{U_n}$

1) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

2) بين أن المتتالية (V_n) حسابية ، ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n

3) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $U_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2$ و $2 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n > 0$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$.

بما أننا فرضنا $U_n > 0$ فإن $1+U_n > 0$ ومنه $\frac{U_n}{1+U_n} > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ بالتالي p_{n+1} صحيحة و عليه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) 1) (V_n) حسابية أساسها q) يعني $V_{n+1} = V_n + q$

$$V_{n+1} = \frac{3}{U_n+1} = \frac{3}{\frac{U_n}{1+U_n}} = 3\frac{(1+U_n)}{U_n} = \frac{3}{U_n}+3 = V_n+3$$

إذن (V_n) حسابية أساسها $q=3$ وحدها الأول $V_0 = \frac{3}{U_0} = \frac{3}{2}$

ب) بما أن (V_n) حسابية حدها الأول V_0 أساسها q

فإن عبارة الحد العام هي $V_n = V_0 + qn$ إذن $V_n = \frac{3}{2}+3n$

- لدينا $V_n = \frac{3}{U_n}$ و منه $U_n = \frac{3}{V_n}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{3}{\frac{3}{2}+3n}$

- $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{3}{2}+3n} = 0$$

تطبيق 5 المتتاليات المحدودة

1) (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

بـ $U_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

2) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$

بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $1 \le V_n \le 3$.

✓ الحل

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $n^2 \ge 1$

بالقلب نجد $0 < \frac{1}{n^2} \le 1$ بالضرب في -3 نجد $-3 \le \frac{-3}{n^2} < 0$

و بإضافة 2 نجد $-1 \le 2 - \frac{3}{n^2} < 2$ أي $-1 < U_n < 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة لأنها محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2) $$V_n = \frac{(n^2+n+1)+(2n+2)}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} + \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} = 1+2\times\frac{n+1}{n^2+n+1}$$

بما ان $0 \langle 2(\frac{n+1}{n^2+n+1})$ فإن $1 \leq 1+2(\frac{n+1}{n^2+n+1})$ اي $V_n \geq 1$

و بما ان $n^2+n+1 \geq n+1$ فإن $\frac{n+1}{n^2+n+1} \leq 1$

وبضرب طرفي هذه المتباينة في 2 نجد $2(\frac{n+1}{n^2+n+1}) \leq 2$ بإضافة 1 نجد $V_n \leq 3$

إذن $1 \geq V_n \geq 3$

تطبيق 6 حصر متتالية بمتتاليتين

من أجل كل متتالية (U_n) من المتتالية الآتية اوجد متتاليتين (V_n) و (W_n) مختلفتين عن (U_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$.

أ) $U_n = \frac{n+3}{n+2}$

ب) $U_n = \frac{5n^2-4n+7}{n-1}$ مع $n \geq 2$

جـ) $U_n = \sqrt{3+n}$

د) $U_n = \frac{1}{\sqrt{3+n}}$

✓ الحل

أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ (1)

$n+3 \geq n+2 \geq n+1$ بالقلب نجد $\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ (2)

بضرب حدود (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{n+2}{n+3} \leq U_n \leq \frac{n+4}{n+1}$

ومنه $W_n = \frac{n+4}{n+1}$ و $V_n = \frac{n+2}{n+3}$.

ب) من أجل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $U_n = n-3+\frac{4}{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $n-1 \geq 1$ ومنه $0 \langle \frac{1}{n-1} \leq 1$

بالضرب في 4 نجد $0 \langle \frac{4}{n-1} \leq 4$

وبإضافة $n-3$ نجد $n-3+0 \leq n-3+\frac{4}{n-1} \leq n-3+4$

اي $n-3 \leq U_n \leq n+1$ إذن $W_n = n+1$ و $V_n = n-3$.

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ بالجذر نجد :

$\sqrt{n+4} \geq \sqrt{n+3} \geq \sqrt{n+2}$ اي $W_n \geq U_n \geq V_n$.

حيث $V_n = \sqrt{n+2}$ و $W_n = \sqrt{n+4}$

د) $\sqrt{n+4} \geq \sqrt{n+3} \geq \sqrt{n+2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

اي $V_n \leq U_n \leq W_n$ حيث $W_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ و $V_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$.

تطبيق 7 حساب نهاية متتالية باستعمال الحصر

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

1) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 \langle U_n \leq \sqrt{2}$

2) أ) بين انه إذا كانت $n \rangle 10^4$ فإن $0 \langle U_n \langle 10^{-2}$

ب) بين أنه إذا كانت $n \rangle 10^8$ فإن $0 \langle U_n \langle 10^{-4}$

جـ) كيف نختار n بحيث $U_n \langle 10^{-8}$ ؟ ما هي نهاية (U_n) ؟

✓ الحل

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+2 \rangle n$ بجذر الطرفين نجد $\sqrt{n+2} \rangle \sqrt{n}$ بالتالي :

$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \rangle 0$ اي $U_n \rangle 0$.

U_n تكتب على الشكل $U_n = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{2}$ و $\sqrt{n} \geq 0$ ومنه

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n} \geq \sqrt{2}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ بالضرب في 2 نجد

$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$ اي $U_n \leq \sqrt{2}$ إذن $0 \langle U_n \leq \sqrt{2}$

2) أ) إذا كان $n \rangle 10^4$ فإن $\sqrt{n+2} \rangle \sqrt{10^4+2} \rangle \sqrt{10^4} \geq 10^2$ و $\sqrt{n} \rangle 10^2$

وبالتالي يكون $2 \times 10^2 \langle \sqrt{n+2}+\sqrt{n}$ بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \langle \frac{1}{2\times 10^2}$

وبالضرب في 2 نجد $U_n \langle 10^{-2}$

ب) إذا كان $n \rangle 10^8$ فإن $\sqrt{n+2} \rangle 10^4$ و $\sqrt{n} \rangle 10^4$ و بالتالي يكون :

$2\times 10^4 \langle \sqrt{n+2}+\sqrt{n}$ و بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \langle \frac{1}{2\times 10^4}$ إذن $U_n \langle 10^{-4}$

ب) من السؤال (أ) و (ب) نستنتج أنه يمكن اختيار n بحيث $n\rangle 10^{16}$ يحقق $U_n\langle 10^{-8}$.

- نلاحظ أنه كلما كبر n فإن المجال الذي تنتمي إليه الحدود U_n يصغر و يقترب نحو الصفر ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$.

تطبيق 8 دراسة تقارب متتاليات - البرهان بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}$.

1) أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $U_n=\sqrt{1+n}$

ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n).

2) نضع $V_n=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ و $W_n=\dfrac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ادرس تقارب هاتين المتتاليين.

✓ الحل

1) أ) نسمي p_n الخاصية "$U_n=\sqrt{n+1}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0=1=\sqrt{1+0}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n=\sqrt{1+n}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}=\sqrt{2+n}$.

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n^2}=\sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2}=\sqrt{2+n}$$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+n}=+\infty$ منه (U_n) متتالية متباعدة.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_n=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\sqrt{1}=1$ إذن المتتالية (V_n) متقاربة.

- $W_n=\dfrac{U_n+U_{n+1}}{U_{n+2}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين.

W_n تكتب $W_n=\dfrac{\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} W_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{n+3}}+\dfrac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}\right)=1+1=2$ إذن المتتالية (W_n) متقاربة.

تطبيق 9 دراسة تقارب متتالية و حساب نهايتها

(U_n) متتالية حدودها موجبة معرفة بـ $U_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $n^2U_n^2-(n-1)^2U_{n-1}^2=n$ (I)

1) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n\geq 1$ بـ $V_n=n^2U_n^2$

أ) تحقق أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $V_{n+1}-V_n=n+1$.

ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n.

2) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة يطلب إيجاد نهايتها.

✓ الحل

1) أ) من المساواة (I) نجد $V_n-V_{n-1}=n$

باستبدال n بـ $n+1$ نحصل على $V_{n+1}-V_n=n+1$.

ب) من العلاقة $V_{n+1}-V_n=n+1$ نجد :

$$V_2-V_1=2$$
$$V_3-V_2=3$$
$$V_4-V_3=4$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$V_{n-1}-V_{n-2}=n-1$$
$$V_n-V_{n-1}=n$$

بجمع أطراف المساويات طرفا إلى طرف نجد $V_n-V_1=2+3+\ldots+n$

ومنه $V_n=V_1+2+3+\ldots+n$ وبما أن $V_1=1$ فإن $V_n=1+2+3+\ldots+n$.

V_n مجموع n حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 1

ومنه $V_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2) $U_n^2=\dfrac{V_n}{n^2}=\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$ ومنه $U_n=\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2n^2}}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ وبالتالي المتتالية (U_n) متقاربة.

تطبيق 10 اتجاه تغير متتالية - تقارب متتالية

(U_n) متتالية معرفة بـ $\begin{cases}U_0=5\\ U_{n+1}=3+\dfrac{U_n}{2}\end{cases}$

ا) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \rangle \frac{9}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير (U_n)

جـ) استنتج ان (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

✓ الحل

ا) نسمي p_n الخاصية "$U_n \rangle \frac{9}{2}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 6$ و $6 \rangle \frac{9}{2}$

- نفرض ان p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي اي $U_n \rangle \frac{9}{2}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} \rangle \frac{9}{2}$

لدينا فرضا $U_n \rangle \frac{9}{2}$ بالضرب في $\frac{1}{3}$ نجد $\frac{U_n}{3} \rangle \frac{3}{2}$

وبإضافة 3 نجد $3+\frac{U_n}{3} \rangle \frac{9}{2}$ أي $U_{n+1} \rangle \frac{9}{2}$

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

ب) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2})$

بما ان $U_n - \frac{9}{2} \rangle 0$ فإن $-\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2}) \langle 0$ اي $U_{n+1} - U_n \langle 0$ مما يدل أن (U_n) متناقصة.

جـ) بما ان (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = 3 + \frac{x}{3}$

$x = 3 + \frac{x}{3}$ يكافئ $\frac{2}{3}x = 3$ يكافئ $x = \frac{9}{2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell = \frac{9}{2}$ مقبول وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{9}{2}$

تطبيق 11 المتتالية المحدودة

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

2) (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = -1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

✓ الحل

1) من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n+1 \geq 1$ و منه $\sqrt{n+1} \geq 1$

بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$.

2) $U_n + 1 = \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$ منه $|U_n + 1| = \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}\right|$

بما ان $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ و $0 \leq |\sin n| \leq 1$ فإن $\frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ و $0 \langle \frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}}$ اي $|U_n + 1| \leq 1$

هذا معناه أن $-1 \leq U_n + 1 \leq 1$ اي $-2 \leq U_n \leq 0$ إذن المتتالية (U_n) محدودة.

تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

2) ا) احسب $U_{2n} - U_n$ ، ب) استنتج أن $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) بفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{2n} \geq \frac{n}{2}$

هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

✓ الحل

1) $U_{n+1} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\frac{1}{n+1} \rangle 0$ فإن $U_{n+1} - U_n \rangle 0$ ومنه (U_n) متزايدة

2) ا) $U_{2n} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $2n \leq \ldots \leq n+4 \leq n+3 \leq n+2 \leq n+1$

بالقلب نجد $\frac{1}{2n} \geq \ldots \geq \frac{1}{n+3} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+1}$

إذن $U_{2n}-U_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}}_{n \text{ حدا}}$ أي $U_{2n}-U_n \geq n\times\frac{1}{2n}$

ومنه $U_{2n}-U_n \geq \frac{1}{2}$

3) بما أن $\lim \frac{n}{2}=+\infty$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة (حسب نظرية الحصر).

تطبيق 13 البرهان بالتراجع - دراسة تقارب متتالية

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) استنتج أن المتتالية (U_n) المعرفة بـ :

$U_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ \dots\ +\frac{1}{n!}$ محدودة من الأعلى ومتقاربة .

✓ الحل

1) نسمي p_n الخاصية " $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ "

- p_1 صحيحة لأن $\frac{1}{1!}=1$ و $\frac{1}{2^{1-1}}=1$ و $1\leq 1$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n غير معدوم أي $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$.

بضرب طرفي المتباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في $\frac{1}{n+1}$ نجد $\frac{1}{(n+1)(n!)} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$

أي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)\,2^{n-1}}$ (1)

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

فإن $\frac{1}{(n+1)\,2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n}$ (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

إذن p_{n+1} صحيحة بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

2) $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$

$\vdots \quad \vdots$

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ بجمع أطراف المتباينات طرف لطرف نجد :

$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ \dots\ \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n-1}}$ أي $U_n \leq (\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+\ \dots\ +(\frac{1}{2})^{n-1}$

$(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+\dots+(\frac{1}{2})^{n-1}$ مجموع n حد من حدود متتالية هندسية حدها 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

ومنه $(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1+\ \dots\ +(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2(\frac{1}{2})^n$

إذن $U_n \leq 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$

لدينا $(\frac{1}{2})^n \geq 0$ ومنه $1-(\frac{1}{2})^n \leq 1$

بالضرب في 2 نجد $2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right] \leq 2$ إذن $U_n \leq 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى.

- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)!}\rangle 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما و بما أنها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تطبيق 14 المتتالية الدورية

(U_n) متتالية دورية إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معدوم p بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+p}=U_n$

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ $\begin{cases}U_0=2\\U_n+U_{n+1}=5\end{cases}$

بين أن (U_n) دورية. هل (U_n) رتيبة ؟

✓ الحل

$U_{n+p}=5-U_{n+p-1}=5-(5-U_{n+p-2})=U_{n+p-2}$

بما أن $U_{n+p}=U_n$ و $U_{n+p-2}=U_n$

فإنه ينتج من أجل كل n لدينا $n+p-2=n$ أي $p=2$

و بالتالي (U_n) دورية دورها 2 .

- $U_{n+1}-U_n=5-2U_n$

إذا كان n زوجي فإن $5-2U_n\rangle 0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n\rangle 0$

و إذا كان n فردي فإن $5-2U_n\langle 0$ و بالتالي $U_{n+1}-U_n\langle 0$

إذن إشارة $U_{n+1}-U_n$ ليست ثابتة و بالتالي (U_n) ليست رتيبة.

تطبيق 15 تعيين نهاية متتالية بطريقتين مختلفتين

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}$

1) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي موجب تماما $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج تقاربها.

2) أ) بين انه من اجل كل $x\in[0,\pi]$ يكون $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$

ب) بين عندئذ انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

و استنتج نهاية المتتالية (U_n).

✓ الحل

1) أ) نسمي p_n الخاصية " $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ "

- p_1 صحيحة لأن $U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1$

- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم أي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_{n+1}\le 1$.

لدينا $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ بإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد $\frac{\sqrt{2}}{2}+1\le U_n+1\le 2$

بالجذر نجد $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le\sqrt{U_n+1}\le\sqrt{2}$ بالضرب في $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد :

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\le U_{n+1}\le 1$ لأن $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\langle 1$.

إذن p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}-U_n=\frac{\frac{1}{2}(1+U_n)-U^2_n}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n}=\frac{(U_n-1)(-2U_n-1)}{2(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}+U_n)}$

بما ان $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ فإن $-2U_n-1\le 0$ و $U_n-1\le 0$ ومنه

$(U_n-1)(-2U_n-1)\rangle 0$ بالتالي $U_{n+1}-U_n\rangle 0$ اي (U_n) متزايدة

- بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو

جذر للمعادلة $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x}$ يكافئ $2x^2-x-1=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-\frac{1}{2})$

$x=-\frac{1}{2}$ مرفوض و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

2) أ) لدينا من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا :

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ و $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$

منه ينتج $\frac{1+\cos x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}$ إذن $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

بما ان $\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos\frac{x}{2}\rangle 0$ ومنه $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$.

ب) نسمي p_n الخاصية " $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0=0=\cos\frac{\pi}{2^1}$

- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=1$

تطبيق 16 المقارنة و النهاية

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ:

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) بين انه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

2) استنتج تقارب المتتالية (U_n) ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

1) (U_n) مجموع n حدا أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ و أكبرها $\frac{n}{n^2+1}$

وعليه يكون $\frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$

ومنه نجد $n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) \leq U_n \leq n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ أي $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

لأن $n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$

2) بما أن $W_n \leq U_n \leq V_n$ حيث $V_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ و $W_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ و (V_n) و (W_n) متقاربتان

و لهما نفس النهاية فإن المتتالية (U_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$

تطبيق 17 النهايات و الحصر

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{9}{U_n}\right) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3

2) ادرس اتجاه تغير (U_n)

3) بين بالتراجع أن $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$ ثم استنتج نهاية (U_n)

✓ الحل

1) (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3 هذا معناه أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq 3$

نسمي p_n الخاصية "$U_n \geq 3$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $4 \geq 3$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $U_n \geq 3$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \geq 3$

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right)$ متزايدة تماما على $[3,+\infty[$

لأن $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-9}{x^2}\right)$ و $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \geq 3$.

بما أن f متزايدة تماما على $[3,+\infty[$ و $U_n \geq 3$

فإن $f(U_n) \geq f(3)$ أي $U_{n+1} \geq f(3)$

لكن $f(3) = 3$ إذن $U_{n+1} \geq 3$ وهذا يعني أن p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{9}{U_n}\right) - U_n = -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{9}{U_n}\right)$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{U^2_n - 9}{U_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n}$$

بما أن $U_n \geq 3$ فإن $(U_n - 3) \geq 0$ و $U_n + 3 > 0$

ومنه $-\frac{1}{2}\frac{(U_n-3)(U_n+3)}{U_n} \leq 0$

أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ و هذا يعني (U_n) متناقصة.

3) نسمي p_n الخاصية "$U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $3 + \frac{1}{2^0} = 4$ و $4 \leq 4$

- نفرض أن p_n صحيحة اي $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$.

لدينا $U_n \geq 3$ منه ينتج $\frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2}$ (1)

من الفرض $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$ ينتج $\frac{1}{2}U_n \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ (2)

بجمع طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{1}{2}U_n + \frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$

اي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبما أن $3 \leq U_n \leq 3+\frac{1}{2^n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

تطبيق 18 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=aU_n+b$

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $2U_{n+1}=U_n-1$

1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2) α عدد حقيقي و (V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n=U_n-\alpha$

أ) عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية

ب) اكتب V_n و U_n بدلالة n ثم ادرس تقارب المتتالية (U_n)

جـ) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}[$

✓ الحل

1) من المعطيات نجد $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}$

$U_1=0$ ، $U_2=-\frac{1}{2}$ ، $U_3=\frac{-3}{4}$ ، $U_4=\frac{-7}{8}$ ، $U_5=-\frac{15}{16}$

2) أ) $V_{n+1}=U_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}(V_n+\alpha)-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}$

حتى تكون (V_n) هندسية يجب أن يكون $-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}=0$ أي $\alpha=-1$

ب) $V_n=V_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_0=U_0+1=2$ إذن $V_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-1$ ومنه (U_n) متقاربة نحو -1

جـ) $U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}[$ هذا معناه أن $-1-10^{-4} < U_n < -1+10^{-4}$

أي $-10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1 < -10^{-4}$ وبإضافة 1 نجد $-10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-4}$

المتباينة $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > -10^{-4}$ دوما محققة يبقى لنا فقط إيجاد n بحيث $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-4}$

بما أن $10^{-4} < 2^{-4}$ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$

ومنه $n-1 > 4$ أي $n > 5$ ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 6 .

تطبيق 19 المتتاليات و الادخار

نضع في بنك مبلغ قدره $25000\ DA$ في أول جانفي 2008 بفائدة قدرها 5% لكل سنة و نسحب في نهاية كل سنة $2500\ DA$.

إذا كانت U_n القيمة بالدينار للمبلغ المتبقي في البنك في السنة n (أي السنة $2008+n$)

1) أوجد علاقة تربط بين U_{n+1} و U_n

2) بين أن المتتالية (V_n) المعرفة بـ $V_n=U_n-50000$ هندسية يطلب تعيين أساسها

3) ما هي السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك ؟

✓ الحل

1) إذا كان U_n هو المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n)$ و U_{n+1} المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n+1)$ فإن $U_{n+1}=U_n+5\%\times U_n-2500$

ومنه نجد $U_{n+1}=1.05U_n-2500$

2) $V_{n+1}=U_{n+1}-50000=1{,}05\,U_n-2500-50000$

$=1{,}05\,(V_n+50000)-52500$

$=1{,}05\,V_n+1{,}05\times50000-52500=1{,}05\,V_n$

إذن (V_n) هندسية أساسها $q=1{,}05$

مع $V_0=U_0-50000=-25000$ $V_n=V_0\,q^n$

ومنه $V_n=-25000\,(1{,}05)^n$

بما أن $U_n=V_n+50000$ فإن $U_n=-25000\,(1{,}05)^n+50000$

3) ينفذ رصيده من البنك هنا معناه $U_n=0$ أي $(1{,}05)^n=2$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $n\approx14{,}25$

ومنه السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك هي $2008+15$ أي 2023 .

تطبيق 20 المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=\frac{aU_n+b}{cU_n+d}$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{2U_n+1}{U_n+2}$.

1) بين بالتراجع أن $0 \leq U_n < 1$

2) بين أن المتتالية (U_n) رتيبة .

3) (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}$
بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4) اكتب V_n و U_n بدلالة n معينا نهاية (U_n)
5) اوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من اجل كل $n\geq n_0$ يكون $U_n\rangle 0,99$.

✓ الحل

1) يمكن كتابة $U_{n+1}=2-\frac{3}{U_n+2}$

نسمي p_n الخاصية "$U_n\geq 0$ و $U_n\langle 1$"

- p_0 صحيحة لأن $U_0=0$ و $0\geq 0\langle 1$

- نفرض ان p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n اي $U_n\geq 0\langle 1$
ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}\geq 0\langle 1$

لدينا $0\leq U_n\langle 1$ منه ينتج $\frac{1}{3}\langle\frac{1}{U_n+2}\leq\frac{1}{2}$

بالضرب في (-3) نجد $-1\langle\frac{-3}{U_n+2}\leq-\frac{3}{2}$

وبإضافة 2 نجد $0\leq\frac{1}{2}\leq U_{n+1}\langle 1$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) $U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n+1}{U_n+2}-U_n=\frac{-U_n^2+1}{U_n+2}=-\frac{(U_n-1)(U_n+1)}{U_n+2}$

بما أن $0\leq U_n\langle 1$ فإن $-(U_n-1)\geq 0$

ومنه $U_{n+1}-U_n\rangle 0$ أي (U_n) متزايدة.

3) $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}=\frac{\frac{2U_n+1}{U_n+2}-1}{\frac{2U_n+1}{U_n+2}+1}=\frac{U_n-1}{3U_n+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{U_n-1}{U_n+1}\right)=\frac{1}{3}V_n$

منه (V_n) هندسية اساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0=\frac{U_0-1}{U_0+1}=-1$

4) لدينا $V_n=V_0\,q^n$ إذن $V_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}$ يكافئ $U_n=\frac{V_n+1}{1-V_n}$

إذن $U_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5) $U_n\rangle 0,99$ يكافئ $\frac{0,01}{1,99}\rangle\left(\frac{1}{3}\right)^n$ يكافئ $\frac{1}{3^4}\rangle\frac{1}{199}\rangle\left(\frac{1}{3}\right)^n$

و منه نجد $n\rangle 4$ و عليه اصغر قيمة لـ n هـ، 5.

تطبيق 21 المتتاليات المتجاورة

a و b عددان حقيقيان بحيث $0\langle a\langle b$.
(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$
و $U_0=a$ و $V_0=b$ و $U_{n+1}=\sqrt{U_nV_n}$ و $V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$

1) بين انه من اجل كل n تكون (U_n) و (V_n) موجبتين تماما.
2) بين انه من اجل كل n يكون $U_n\leq V_n$
3) أ) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$V_{n+1}-U_{n+1}\leq\frac{1}{2}(V_n-U_n)$

ب) استنتج ان $0\leq V_n-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$

4) أ) بين أن المتتاليتين (V_n) و (U_n) متجاورتان.
ب) إذا كانت $a=2$ و $b=5$ استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة التقريبية للنهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) بتقريب 10^{-3}.

✓ الحل

1) نبين انه من اجل كل n لدينا $U_n\rangle 0$ و $V_n\rangle 0$
نسمي p_n الخاصية "$U_n\rangle 0$ و $V_n\rangle 0$"

- p_0 صحيحة لأن $V_0=a$ و $V_0=b$ و $a\rangle 0$ و $b\rangle 0$

- نفرض ان p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي اي $U_n\rangle 0$ و $V_n\rangle 0$
و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1}\rangle 0$ و $V_{n+1}\rangle 0$.

بما أن $U_n\rangle 0$ و $V_n\rangle 0$ فإن $\frac{U_n+V_n}{2}\rangle 0$

أي $V_{n+1}\rangle 0$

بما أن $0 < U_n$ و $0 < V_n$ فإن $0 < U_n V_n$

وبالتالي $0 < \sqrt{U_n V_n}$ أي $0 < U_{n+1}$

ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n.

2) p_n الخاصية " $U_n < V_n$ "

– p_0 صحيحة لأن $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a < b$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n < V_n$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} < V_{n+1}$.

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} - \frac{U_n + V_n}{2}$$

$$= \frac{U_n V_n - \left(\frac{U_n + V_n}{2}\right)^2}{\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{4\left(\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}\right)}$$

بما أن $0 < -(U_n - V_n)^2$ فإن $U_{n+1} - V_{n+1} < 0$

أي $U_{n+1} < V_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

3) أ) $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n V_n}$

(لأن $V_n < U_n$) $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{U_n + V_n}{2} - U_n$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} < (V_n - U_n) \times \frac{1}{2}$

ب) نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

- من أجل $n = 0$ لدينا $V_0 - U_0 = b - a$ و $b - a \leq (b-a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$

نفرض أن الخاصية p_n صحيحة أي $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

ونبرهن أن الخاصية p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

لدينا $(V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

إذن p_{n+1} صحيحة ومنه p_n صحيحة من أجل كل n

4) أ) تعيين اتجاه تغير المتتالية (V_n)

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$ ومنه نستنتج أن (V_n) متناقصة.

- تعيين اتجاه تغير (U_n).

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} = \frac{U_n (V_n - U_n)}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} > 0$

لأن $V_n - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة.

$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0$ (حسب قاعدة الحصر)

إذن (V_n) و (U_n) متجاورتان.

ب) (1) $|U_n - V_n| \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $|U_n - \ell| < 10^{-3}$ و $|V_n - \ell| < 10^{-3}$

بما أن $|U_n - V_n| \leq |U_n - \ell| + |V_n - \ell|$ فإن (2) $|U_n - V_n| \leq 2 \times 10^{-3}$

حتى تكون (2) محققة يجب أن يكون $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2 \times 10^{-3}$

أي $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{3} \times 10^{-3}$ بالتبسيط نجد $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 66 \times 10^{-5}$

ومنه قيمة n التي تحقق المتباينة الأخيرة هي 11 إذن القيمة التقريبية لـ ℓ هي U_{11}

تطبيق 22 المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_1 = \frac{2}{7}$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - U_n}$

(نقبل انه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n \neq 0$ و $U_n \neq 3$)

1) احسب U_2 و U_3.

2) أ) (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $V_n = \frac{1}{U_n}$ احسب V_1

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} = 3V_n - 1$

3) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n = V_n - \frac{1}{2}$ عبر عن W_{n+1} بدلالة W_n

ثم عين W_n بدلالة n

4) أ) استنتج عبارة U_n بدلالة n

ب) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

✓ الحل

1) $U_2 = \frac{U_1}{3-U_1} = \frac{\frac{2}{7}}{3-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{2}{19}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{3-U_2} = \frac{\frac{2}{19}}{\frac{55}{19}} = \frac{2}{55}$

2) ا) $V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{19}{2}$

ب) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{3-U_n}} = \frac{3-U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n}\right) - 1 = 3V_n - 1$

3) $W_n = V_n - \frac{1}{2}$

$W_{n+1} = V_{n+1} - \frac{1}{2} = (3V_n - 1) - \frac{1}{2} = 3V_n - \frac{3}{2} = 3\left(V_n - \frac{1}{2}\right) = 3W_n$

$W_1 = V_1 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2} - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$

(W_n) متتالية هندسية حدها الأول $W_1 = 9$ و أساسها $r = 3$

ومنه $W_n = W_1 \times r^{n-1}$ بالتعويض نجد $W_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

4) ا) $V_n = W_n + \frac{1}{2}$ و $U_n = \frac{1}{V_n}$

ومنه $U_n = \frac{1}{W_n + \frac{1}{2}}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{1}{3^{n+1} + \frac{1}{2}}$

ب) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3^{n+1}\right) = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تطبيق 23 المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$ - النهاية و الحصر

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \geq 0$

ثم بين أن $U_{n+1} - 3$ و $U_n - 3$ مختلفين في الإشارة.

2) ا) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ب) استنتج أنه إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها 3.

3) استنتج أنه من أجل كل n يكون $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4}|U_n - 3|$ (نقبل أن $U_n \geq 2$)

4) ا) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $|U_n - 3| \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

✓ الحل

1) - من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ والمتباينة $0 \rangle 1$ صحيحة إذن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 0$ أي $U_n \rangle 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \rangle 0$.

بما أن $U_n \rangle 0$ فإن $3U_n + 9 \rangle 0$ و $2U_n \rangle 0$

وبالتالي $0 \langle \frac{3U_n + 9}{2U_n}$ أي $U_{n+1} \rangle 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن من أجل كل $n \geq 0$ لدينا $U_n \rangle 0$

$U_{n+1} - 3 = \frac{3U_n + 9}{2U_n} - 3 = \frac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \frac{3(3 - U_n)}{2U_n}$

بما أن $2U_n \rangle 0$ فإن $(U_{n+1} - 3)(3 - U_n) \langle 0$

وبالتالي نستنتج أن $U_{n+1} - 3$ و $U_n - 3$ مختلفين في الإشارة.

2) نسمي p_n الخاصية "$U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$"

- من أجل $n = 0$ يكون $U_0 = 1$ و $U_1 = 6$ و $1 \leq 3 \leq 6$ ومنه p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 0$ اي $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{2n+2} \leq 3 \leq U_{2n+3}$

• نبرهن أولا $U_{2n+2} \leq 3$

لدينا $U_{2n+2} = \frac{3U_{2n+1} + 9}{2U_{2n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+1}}$

بما أن $\frac{9}{2U_{2n+1}} \leq \frac{3}{2}$ فإن $U_{2n+2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ اي $U_{2n+2} \leq 3$

• نبرهن ثانيا $U_{2n+3} \geq 3$

$U_{2n+3} = \frac{3U_{2n+2} + 9}{2U_{2n+2}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+2}}$

لدينا $2U_{2n+2} \leq 6$ ومنه $\frac{1}{2U_{2n+2}} \geq \frac{1}{6}$

بالضرب في 9 نجد $\frac{9}{2U_{2n+2}} \geq \frac{3}{2}$

و بإضافة $\frac{3}{2}$ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{2n+3} \geq \frac{3}{2}+\frac{3}{2}$

اي $U_{2n+3} \geq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell$

وبالتالي $\ell \leq 3 \leq \ell$ ومنه نجد $\ell = 3$

3) $U_{n+1}-3 = \frac{3(3-U_n)}{2U_n}$ و بالتالي $|U_{n+1}-3| = \frac{3|U_n-3|}{2U_n}$

بما أن $U_n \geq 2$ فإن $2U_n \geq 4$ ومنه $\frac{3}{2U_n} \leq \frac{3}{4}$

وبالضرب في $|U_n-3|$ نجد $\frac{3|U_n-3|}{2U_n} \leq \frac{3}{4}|U_n-3|$

اي $|U_{n+1}-3| \leq \frac{3}{4}|U_n-3|$

4) أ) نسمي p_n الخاصية " $|U_n-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ "

- p_0 صحيحة لأن $|U_0-3| = |2| = 2$ و $2 \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

نفرض أن p_n صحيحة اي $|U_n-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $|U_{n+1}-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$.

بضرب طرفي المتباينة $|U_n-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ في $\frac{3}{4}$ نجد $\frac{3}{4}|U_n-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

اي $|U_{n+1}-3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

منه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) بما أن فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n-3| = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو

تطبيق 24 الدوال المستمرة و حساب نهاية متتالية

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n$

1) احسب U_2 , U_1

2) نرمز بـ f إلى الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) برهن انه إذا كان $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$.

3) استنتج من السؤال الثاني أن :

أ) المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3 .

ب) المتتالية (U_n) متزايدة.

4) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

1) $U_1 = -\frac{1}{3}U_0^2 + 2U_0 = \frac{11}{12}$ ، $U_2 = -\frac{1}{3}U_1^2 + 2U_1 = \frac{671}{432}$

2) أ) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا ،

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 3$.

- إذا كان $x < 3$ فإن f متناقصة تماما.

- إذا كان $x > 3$ فإن f متزايدة تماما.

ب) إذا كان $0 \leq x \leq 3$ فإن $0 \leq f(x) \leq f(3)$

لأن f دالة متزايدة تماما على $[0,3]$ و منه $0 \leq f(x) \leq 3$

إذن $f(x) \in [0,3]$.

3) أ) بما أن من أجل كل $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$ فإننا نستطيع تعريف المتتالية (U_n) بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

- (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3

هذا معناه أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ يكون $U_n \leq 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

نسمي p_n الخاصية "$U_n \leq 3$"

ومن أجل $n=0$ يكون $U_0=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\leq 3$

ومنه p_0 صحيحة.

نفرض ان p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n\geq 0$ اي $U_n \leq 3$

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1}\leq 3$.

بما ان $0\leq U_n \leq 3$ فرضا و f متزايدة تماما على المجال $[0,3]$

فإن $0\leq f(U_n)\leq 3$ اي $U_{n+1}\leq 3$

إذن p_{n+1} صحيحة.

وعليه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

ب) $U_{n+1}-U_n = -\frac{1}{3}U_n^2+2U_n-U_n$

$= -\frac{1}{3}U_n(U_n-3)$

بما ان $U_n\leq 3$ فإن $U_n-3\leq 0$ وبالتالي $-\frac{1}{3}U_n(U_n-3)\geq 0$

اي $U_{n+1}-U_n\geq 0$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

4) بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

وعليه $\lim U_{n+1}=\lim U_n=\ell$

- حساب ℓ

بما ان f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة عند ℓ

وعليه ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$.

$f(x)=x$ يكافئ $(x=3)$ او $(x=0)$

$\ell=0$ مرفوض لأن الحد الأول للمتتالية هو $\frac{1}{2}$ و المتتالية متزايدة إذن $\ell=3$.

تطبيق 25 الدوال المستمرة و حساب نهايات

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$

1) أ) برهن بالتراجع ان (U_n) متزايدة

ب) استنتج ان (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2. هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

2) أوجد نهاية المتتالية (U_n).

✓ الحل

1) أ) (U_n) متزايدة يعني من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ يكون $U_{n+1}-U_n\geq 0$

نسمي p_n الخاصية " $U_{n+1}-U_n\geq 0$ "

- من أجل $n=0$ يكون $U_1-U_0=\sqrt{3}-1$ و $\sqrt{3}-1\rangle 0$

ومنه p_0 صحيحة.

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ اي $U_{n+1}-U_n\geq 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $U_{n+2}-U_{n+1}\geq 0$.

المتباينة $U_{n+1}-U_n\geq 0$ تعني $U_{n+1}\geq U_n$

بإضافة 2 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{n+1}+2\geq U_n+2$

بجذر الطرفين نجد $\sqrt{U_{n+1}+2}\geq\sqrt{U_n+2}$

اي $U_{n+2}\geq U_{n+1}$

ومنه $U_{n+2}-U_{n+1}\geq 0$ إذن p_{n+1} صحيحة.

ومنه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

ب) $U_{n+1}-U_n=\sqrt{2+U_n}-U_n=\frac{2+U_n-U_n^2}{U_n+\sqrt{2+U_n}}=\frac{-(U_n-2)(U_n+1)}{U_n+\sqrt{2+U_n}}$

- بما أن $U_n+\sqrt{2+U_n}\rangle 0$ و $U_n+1\rangle 0$ و $U_{n+1}-U_n\geq 0$ فإن $-(U_n-2)\geq 0$

ومنه نستنتج $U_n\leq 2$ وهذا يعني أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2

- بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

2) بما ان (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\ell$

- بما أن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{2+x}$ مستمرة عند العدد الحقيقي ℓ فإن ℓ جذر للمعادلة $x=f(x)$

$x=f(x)$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $x=2$ او $x=-1$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell=2$.

تمارين و مسائل

1- المتتالية (U_n) معرفة من أجل $n \geq 3$ بـ $U_n = \frac{4n+2}{n-2}$ لها نهاية عند 4 .
أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل n (n_0 يكون $U_n \in]3.99 . 4.01[$

2- (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n = n^2 - n$ لها نهاية $+\infty$.
أوجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in]10^8 , +\infty[$

3- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n+1}}$
أحسب U_n من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

4- (U_n) المتتالية معرفة من أجل كل n بالعبارة $U_n = \frac{1}{n!}$
1) احسب $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 , U_6$
2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$
3) استنتج نهاية (U_n) .

5- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = n + 1 - \sin n$
بين من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n \leq U_n \leq n+2$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

6- (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{n^4}{n!}$ من أجل كل $n \geq 1$
1) أحسب الحدود السبعة الأولى .
2) أ) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون $n! \geq (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

7- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :
أ) $U_n = \frac{-n+5}{2n+1}$ ب) $U_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ جـ) $U_n = -n^2 + \frac{3}{2n+2}$
د) $U_n = \frac{6n^2-3n+9}{n^2+n+3}$ و) $U_n = \frac{7n+5}{2n^2+3}$ ي) $U_n = \frac{6n^2+2}{7n+3}$

8- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :
أ) $U_n = \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ ب) $\sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$ جـ) $U_n = 1 - \frac{3}{n!}$
د) $U_n \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}$ و) $U_n = \sqrt{2n^4+n^3} - \sqrt{2n^4}$ ي) $U_n = \frac{5n-25n^2+1}{\sqrt{n^2+6}}$

9- أوجد نهاية كل متتالية من المتتاليات (U_n) , (V_n) , (W_n) , (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعبارات التالية :
$U_n = \frac{n^2+2}{n+3}$, $V_n = \frac{U_n}{n+1}$, $W_n = U_n - n + 2$, $t_n = \frac{V_n - 1}{W_n - 1}$

10- (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:
$U_0 = 4$ و $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 5$ و $V_n = U_n - \frac{20}{3}$
1) أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية. ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n .
2) نضع $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ و $S_n' = U_0 + U_1 + ... + U_n$
احسب S_n و S_n' بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتاليتين (S_n) و (S_n')

11- في كل حالة من الحالات التالية عين بيانا الحدود الأولى للمتتاليات المقترحة ثم خمن اتجاه تغير و نهاية هذه المتتالية :
أ) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2 \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n \end{cases}$

12- ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :
أ) $U_n = 2n^2 - 3n + 4$ ، ب) $U_n = \frac{n^3+2n}{n^2+n}$ ، جـ) $U_n = 5(0.3)^n$

د) $U_n=\frac{5^n}{7^n}$ ، و) $U_n=\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\times(0,2)^n$

13 - (U_n) متتالية معرفة من أجل كل $n\geq 4$ بـ $U_n=\frac{1}{n^2-5n+6}$

بين أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$

(يمكنك الاستعانة بدراسة الدالة $f(x)=x^2-5x+6$).

14 - في كل حالة من الحالات التالية هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

أ) $U_n=\cos n$ ، ب) $U_n=3-\frac{1}{n}$ ، جـ) $U_n=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

د) $U_n=\sqrt{5n+3}$ ، و) $U_n=n+2+\cos n$

15 - ادرس تقارب أو تباعد كل متتالية من المتتاليات التالية باستعمال نظريات الحصر :

أ) $U_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\sin(3n)$ ، ب) $U_n=\frac{n+1}{3+\cos 2n}$

جـ) $U_n=\frac{n-\sin n}{n^2+3}$ ، د) $U_n=\frac{2^n+1}{3^{n+2}-1}$

16 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة $U_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}$

1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

2) أ) بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا $U_n\leq 2-\frac{1}{n}$

ب) ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (U_n) ؟

17 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد العددين الحقيقيين A و B بحيث انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=U_0+U_1+\ldots\ldots+U_n$

عين عبارة S_n بدلالة n ثم أوجد نهاية المتتالية (S_n) .

18 - ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_n=\frac{n!}{2^n-1}$ ، ب) $U_n=\frac{n!}{4^n}$ ، جـ) $U_n=\frac{2^n+3}{4^n}$

19 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases}U_0=2\\4U_{n+1}=U_n+3\end{cases}$

1) عين الستة الحدود الأولى و عين القيمة ℓ التي تقترب منها هذه الحدود.

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n=U_n-\ell$ برهن أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

20 - أجب بنعم أو لا عن كل سؤال من الأسئلة المطروحة مبرر الإجابة.

لتكن (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 ينتمي إلى مجال $]1+\infty[$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1}=\sqrt{3U_n-2}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) (U_n) رتيبة

2) (U_n) محدودة من الأسفل بالواحد.

3) إذا كان $U_0\in]1\ ,\ 2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 1.

4) إذا كان $U_0\in]1\ ,\ 2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

5) إذا كان $U_0\in]2,+\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2 .

21 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n-\frac{1}{3}(U_n)^3$

1) بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n\in[0\ ,\ 1]$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

22 - لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{2+U_n^2}$

1) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n>0$

2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1}<\frac{U_n}{2}$ ثم استنتج أن $U_n<\frac{U_0}{2^n}$

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

23 - لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) برهن انه من اجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

24 - (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) برهن انه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq U_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بالعبارة :

$V_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + U_n}{\sqrt{n}}$. ما هي نهاية (V_n) ؟

25 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n + 1)$

1) برهن أن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل n بـ $V_n = 2 - U_n$ هندسية.

2) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم نهاية (U_n).

26 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$ و $V_n = U_n + 3$

1) برهن أن (V_n) هندسية.

2) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (U_n).

3) (S_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (S_n) .

27 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3}$ و (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) أوجد α بحيث (V_n) هندسية.

2) هل (V_n) متقاربة.

3) عبر عن V_n بدلالة n ثم أحسب $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ ثم استنتج قيمة $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

28 - ندرس عدد البكتيريا السببة لمرض التفويد في لتر واحد من ماء يحتوي في البداية على 300 بكتيريا. لاحظنا أنه في كل دقيقة يزداد عدد البكتيريا بالعامل 1,0372 مع العلم أنه في كل دقيقة تموت بكتيريا واحدة.

1) إذا رمزنا بـ U_n إلى عدد البكتيريا الحية حتى الدقيقة n اكتب U_{n+1} بدلالة n

2) نضع $V_n = U_n - \frac{1}{0.037}$.

أ) بين أن (V_n) هندسية ثم أحسب حدها العام بدلالة n .

ب) ما هو عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

3) نريد تحسين هذه الدراسة بحيث ولا بكتيريا تموت خلال التجربة ولتكن W_n عدد البكتيريا الموجودة خلال n دقيقة.

عبر عن W_n بدلالة n ثم احسب عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

كم عدد البكتيريا التي تم انقاضها ؟

29 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$U_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$

$V_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$

هل المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

30 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

و $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$

1) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

2) أحسب U_7 و V_7 ثم استنتج قيمة مقربة للنهاية المشتركة ℓ .

3) بين ان ℓ ليس عددا ناطقا.(استعمال البرهان بالخلف)

ثم تحقق من أن $U_b < \ell < V_b$

31 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = -1$ و $V_0 = 2$.

و $V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}$ و $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن $U_n < V_n$

ب) برهن أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان .

2) أوجد العددين الحقيقيين المختلفين a و b

بحيث أن المتتاليتين (S_n) و (t_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ :

$t_n = U_n + bV_n$ و $S_n = U_n + aV_n$ هندسيتان (ثابتتان).

3) أ) عبر عن S_n و t_n بدلالة n .

ب) احسب نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n).

32 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=-3$ و $U_{n+1}=\frac{U_n-8}{2U_n-9}$

1) أ) مثل بياننا الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$

ب) استعمل المنحنى البياني للدالة f لتخمين طبيعة المتتالية (U_n).

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n < 1$

3) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة

4) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n=1-U_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} < \frac{1}{7}V_n$ ثم استنتج نهاية (V_n)

5) أ) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

ب) أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n > n_0$ يكون $U_n > 0{,}99$

33 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـ $U_0=2$ $U_{n+1}=\frac{U_n^2+5}{2U_n}$ و $V_n=\frac{U_n-\sqrt{5}}{U_n+\sqrt{5}}$

1) أ) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ يكون $V_{n+1}=V_n^2$

ب) استنتج أنه من أجل كل $n\geq 0$ يكون $V_n=(V_0)^{2^n}$

2) أ) احسب V_0 ثم برهن أن $|V_0|\leq\frac{1}{16}$

ب) عين نهاية المتتالية (V_n) ، جـ) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

34 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_1=\frac{3}{2}$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{2}{u_n}\right)$

1) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_n > 0$

2) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\frac{(U_n-\sqrt{2})^2}{U_n}$

ثم استنتج أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_n > \sqrt{2}$

3) أ) برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(U_n-\sqrt{2})+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 1$ لدينا $U_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{1}{2^n}$

4) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

35 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=0$ و $U_{n+1}=\sqrt{6+U_n}$

1) أحسب U_1 , U_2 , U_3.

2) برهن أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 ماذا تستنتج ؟

3) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟ (لحساب النهاية استعن بالدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+6}$)

36 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 > \frac{-5}{4}$ و $U_{n+1}=\sqrt{5+4U_n}$

1) ارسم (C_f) بيان الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{5+4x}$ ثم عين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$

2) نفرض في هذا السؤال أن $U_0=6$ ،

أ) برهن أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل.

ب) ادرس تغيرات المتتالية (U_n) ثم استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب نهايتها.

3) أ) برهن أن النتائج المحصل عليها سابقا (في السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 > 5$

ب) هل نتائج (السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $0 < U_0 < 5$ ؟

جـ) ماذا تصبح المتتالية في حالة $U_0=5$ ؟

37 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=1+\frac{1}{U_n}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $\frac{3}{2}\leq U_n\leq 2$

2) لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=1+\frac{1}{x}$

برهن أنه من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ومن أجل كل $y\geq\frac{3}{2}$ يكون :

$$|f(x)-f(y)|\leq\frac{4}{9}<|x-y| \quad \ldots\ldots (1)$$

3) أ) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فما هي قيمة نهايتها ℓ ؟

ب) برهن باستعمال (1) أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $|U_{n+1}-\ell|\leq\frac{4}{9}|U_n-\ell|$

جـ) استنتج بالتراجع أن $|U_n-\ell|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|U_1-\ell|$

د) برهن عندئذ أن (U_n) متقاربة نحو ℓ.

38 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$U_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\ldots.+\sin\frac{n}{n^2}$$

$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

1) بين أن المتتالية (V_n) متقاربة نحو $\frac{1}{2}$.

2) 1) بين أن كل من الدوال $f : x \mapsto x - \sin x$

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \quad , \quad g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

تأخذ قيم موجبة أو معدومة على المجال $[0, +\infty[$. (استعمل تغيرات كل دالة)

ب) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leq n^4$

ثم استنتج من (1) أن $V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ من أجل كل $n \geq 0$

جـ) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

39 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}} + 1$.

1) تحقق انه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n > 1$

ثم برهن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

3) برر تقارب المتتالية (U_n).

4) احسب الخمسة الحدود الأولى (قيم دقيقة) ما هو التخمين فيما يخص عبارة U_n ؟

5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

الدرس 7

الدوَالُ الأصْليَةُ وحِسَابُ التكامُلاتِ

1 - مفهوم التكامل على مجال

1-1 تكامل دالة درجية



نقول أن f دالة درجية على المجال $[a, b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم لـ $[a, b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0 = a$ ، x_1 ، x_2 ، ... ، $x_n = b$ بحيث $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ و بحيث الدالة f ثابتة على كل مجال من الشكل $]x_{i-1}, x_i[$ حيث $n \geq i \geq 1$.

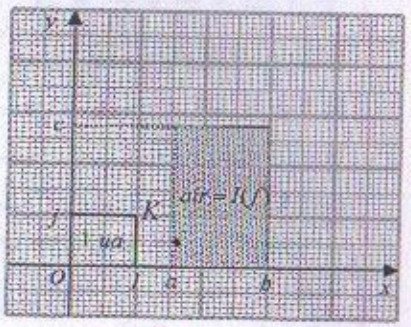
حالة دالة ثابتة على $[a, b]$

f دالة معرفة على مجال $[a, b]$ بحيث من أجل كل x من $]a, b[$ لدينا $f(x) = c$.

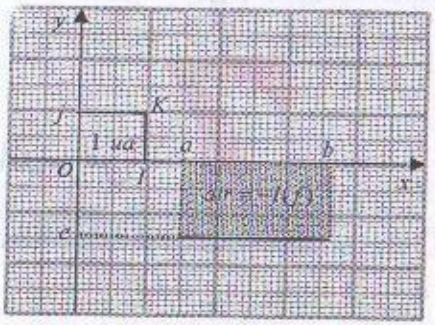
القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن أن تكونا مختلفتين عن العدد c .

بالتعريف تكامل الدالة f على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$

بحيث $I(f) = (b - a) \times c$



لما $c(0$ تكامل الدالة f هو مساحة المستطيل $OIKJ$ اللون.وحدة المساحة هي مساحة المستطيل



لما $c(0$ تكامل الدالة f هو عكس مساحة المستطيل اللون.

حالة دالة درجية على المجال $[a,b]$

إذا كان من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$

لدينا $f(x)=c_i$ فإن تكامل f على $[a,b]$

هو العدد $I(f)$ المعرف بـ:

$$I(f)=(x_1-x_0)\,c_1+(x_2-x_1)\,c_2+\ldots+(x_n-x_{n-1})\,c_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,c_i$$



التكامل $I(f)$ على المجال $[a,b]$

نرمز له بـ $\int_a^b f(t)\,dt$ والذي يقرأ تكامل من a إلى b لـ $f(t)$ تفاضل t.

ملاحظة

بما أن المتغير t يمكن أن نستطيع استبداله بأي متغير آخر و عليه:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\ldots$$

مثال ـ ◆

g دالة درجية معرفة على المجال $[-2\ ,\ 3]$

بـ:
$$\begin{cases} g(x)=2 & ,\ 0\geq x\geq -2 \\ g(x)=-3 & ,\ 1\geq x\geq 0 \\ g(x)=1 & ,\ 3\geq x)\ 1 \end{cases}$$



(γ_g) منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g)=(0+2)\times 2+(1-0)\times(-3)+(3-1)\times 1$$
$$=+4-3+3=4$$

1 - 2 تكامل دالة مستمرة

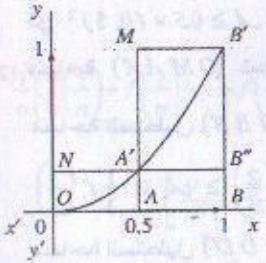
حصر مساحة

مثال ـ ◆

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ بـ $f(x)=x^2$ و (γ) قوسا من القطع المكافئ (ρ) الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

نريد تعيين حصر لمساحة حيز من المستوى تحت المنحني الممثل للدالة f المحدد بالقوس (γ)

و محور الفواصل $(x'x)$ و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن $\mathcal{A}$.

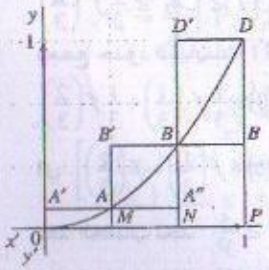


1) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول 0,5.

على المجال $[0\ ,0,5]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0,5,1]$

المساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB''A'$ و $ABB'M$.

اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ على المجال $[0,1]$.



2) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى ثلاثة مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه

فالمساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $AA''NM$ و $BB'NM$.

على المجال $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

- اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ ثم قارنه مع الحصر المحصل عليه في السؤال 1.

3) نقسم المجال $[0,1]$ إلى n مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ مع k عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$.

أ) اعط حصرا لمساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على I بدلالة n و k.

ب) اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ مبينا أن $\mathcal{A}$ محصورة بين متتاليتين (U_n) و (V_n) بحيث $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ أوجد عبارتهما.

(يعطى $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(3n+1)}{6}$)

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\mathcal{A}$ ؟

✓ الحل

1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0{,}5\times f(0{,}5)$ ومنه :

$0 \geq \mathcal{A}_0 \geq 0{,}5\times f(0{,}5)$... (1)

مساحة $(ABB'M)$ تساوي $0{,}5\times f(1)$ ومنه :

$0{,}5\times f(0{,}5) \geq A_1 \geq 0{,}5\times f(1)$... (2)

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0{,}5(f(0{,}5)+f(1)) \geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1 \geq 0{,}5\times f(0{,}5)$

أي $0{,}5\left((0{,}5)^2+1^2\right) \geq \mathcal{A} \geq 0{,}5\times(0{,}5)^2$ بالحساب نجد $0{,}125 \geq \mathcal{A} \geq 0{,}625$.

2) مساحة $(OMAA')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{1}{3})$ ومنه $\frac{1}{3}f(\frac{1}{3}) \geq \mathcal{A}_0 \geq 0$... (1).

مساحة المستطيل $(MNBB')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{2}{3})$ ومنه:

$\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right) \geq \mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$.....(2).

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(1)$ ومنه:

$\frac{1}{3}f(1) \geq \mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$.....(3).

بجمع حدود المتباينات (1) و (2) و (3) نجد،

$\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}f(1) \geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

أي $\frac{1}{3}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right]$

بعد الحساب نجد $\frac{5}{3^3} \geq \mathcal{A} \geq \frac{14}{3^3}$ أي $0{,}18 \geq \mathcal{A} \geq 0{,}51$.

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ أن التقسيم الثاني أعطى لنا حصرا أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر المساحة $\mathcal{A}$ أدق.

3) أ) نرمز بـ $\mathcal{A}_k$ إلى مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f على المجال I ، هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1F_1'F_2F_2'$ و $F_2F_2'F_3F_3'$.

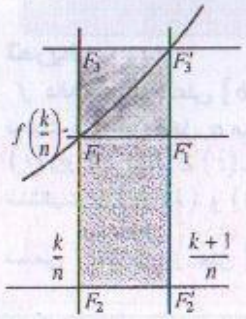
مساحة $(F_1F_1'F_2F_2')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$

مساحة $(F_2F_2'F_3F_3')$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \mathcal{A}_k \geq \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

نضع $g_n(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $h_n(t)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

مع k ينتمي إلى $\{0,1,\ldots,n-1\}$ و $t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$.



ب) $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \mathcal{A}_0 \geq \frac{1}{n}f(0)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) \geq \mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\vdots$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \geq \mathcal{A}_{n-1} \geq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\ldots+\mathcal{A}_{n-1} \geq \frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

و بما أن $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\ldots+\mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^2}\right] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{n}\left[\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

بوضع $U_n=\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2\right]$ و $V_n=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]$.

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$.

$$U_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \quad \text{و} \quad V_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

U_n هي مساحة حيزمن المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية g_n و لتكن $I(g_n)$

V_n هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية h_n و لتكن $I(h_n)$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

بما أن $V_n \geq A \geq U_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{3}$.

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $A = \frac{1}{3}$.

يمكننا التأكد من أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول ان هذه النهاية المشتركة ℓ هي تكامل f على المجال $[0,1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t)dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$

تعريف

f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، نتقبل انه توجد متتاليتين لدالتين درجيتين (g_n) و (h_n) بحيث من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من اجل t من $[a,b]$

$g_n(t) \leq f(t) \leq h_n(t)$... (1).

المتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ ... (2)

نسمي ℓ تكامل f على $[a,b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t)dt$

ملاحظة

1) إذا كانت (s_n) و (S_n) متتاليتين لدالتين درجيتين لهما نفس خصائص (g_n) و (h_n) فإن ℓ هي كذلك نهاية $I(s_n)$ و $I(S_n)$.

2) تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$.

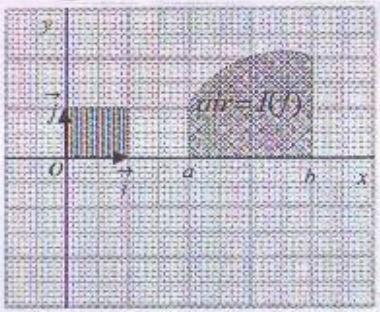
- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى 2^n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة f .

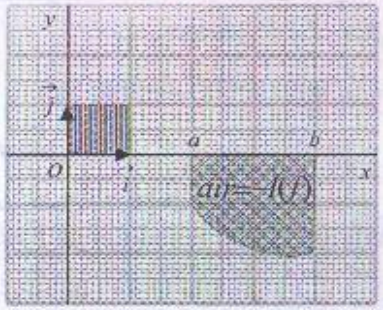
(f رتيبة أو غير رتيبة، موجبة أو سالبة).

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ المحصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t)dt$ لكن حتى و لو كانت f رتيبة على $[a,b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.

3) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f .

- إذا كانت f مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة f .

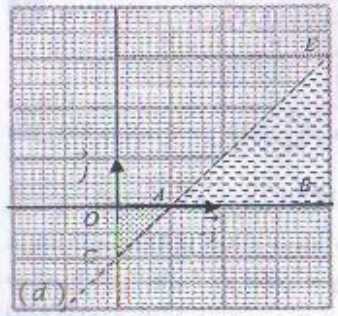




تمرين تدريبي 1

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2x - 1$.

احسب التكاملين التاليين $J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)dt$ ، $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)dt$



✓ الحل

الدالة f ممثلة بالمستقيم (d) الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ ولتكن $B(2,0)$ من محور الفواصل لتكن E نقطة من (d) فاصلتها 2 و ترتيبها 3 .

(d) يقطع محور التراتيب في $C(0,-1)$

- على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ الدالة f موجبة

ومنه J هو مساحة المثلث ABE والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J = \frac{9}{4}$.

- على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ الدالة f سالبة ومنه I نظير مساحة المثلث OCA التي هي $\frac{1}{4}$

ومنه $I = -\frac{1}{4}$.

تمرين تدريبي 2

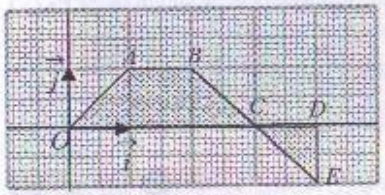
f دالة معرفة على المجال $[0,4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x) = x & , \ x \in [0,1] \\ f(x) = 1 & , \ x \in [1,2] \\ f(x) = -x+3 & , \ x \in [2,4] \end{cases}$$

احسب التكاملين I و J التاليين $I=\int_0^3 f(t)dt$ ، $J=\int_3^4 f(t)dt$

ثم احسب $I+J$.

✓ الحل



- على المجال $[0,3]$ الدالة f موجبة

ومنه I هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

والتي تساوي $\frac{(3+1)\times 1}{2}$ اي 2

ومنه $I=2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3,4]$ الدالة f سالبة

ومنه J هو نظير مساحة المثلث CED التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{-1}{2}$

إذن $I+J=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

❷ - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

2 - 1 تمديد تعريف التكامل إلى a و b كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجية او مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $a<b$ و الآن إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I ، و كان a و b عددين من I بحيث $a\neq b$

نضع التعريف التالي :

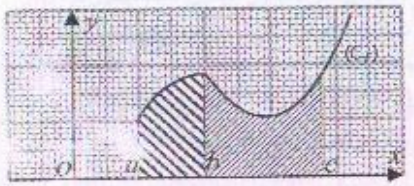
لما $a<b$ تكون $\int_a^b f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt$ ولما $a=b$ تكون $\int_b^a f(t)dt=0$

2 - 2 علاقة شال

مبرهنة

f دالة مستمرة على I . مهما تكن الأعداد الحقيقية a ، b ، c من I

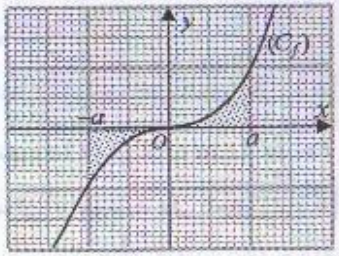
$$\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt=\int_a^c f(t)dt$$

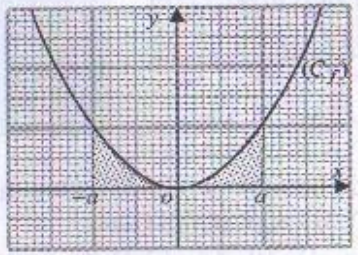


نتيجة

1) اذا كانت f زوجية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$

2) إذا كان f فردية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt=0$





الإثبات

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_0^a f(t)dt$

1) إذا كانت f زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_0^a f(t)dt$ ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$

2) إذا كانت f فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

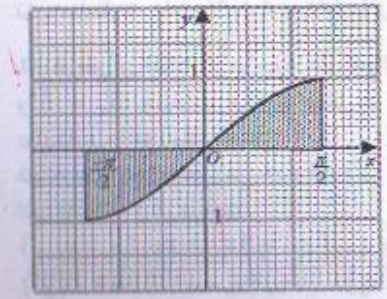
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt$$

و منه $\int_{-a}^{a} f(t)dt=0$

مثال ❶

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x$

احسب التكامل $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

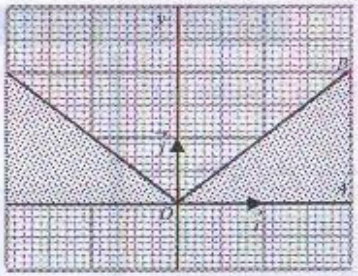


✓ الحل

الدالة f فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=0$.

مثال ❷



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$

احسب التكامل $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$

✓ الحل .

الدالة f زوجية على المجال $[-2\ ,\ 2]$

ومنه $I=\int_{-2}^{2} f(t)\,dt=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

وبما أن f موجبة على المجال $[0\ ,\ 2]$

فإن $\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ تساوي مساحة المثلث OAB التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I=2\int_{0}^{2} f(t)\,dt=2\times 2=4$.

2 - 3 خطية التكامل

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و λ عدد حقيقي كيفي.

مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_a^b \lambda f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt$$

الإثبات

نثبت المساواة $\int_a^b \lambda f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt$ أي $I(\lambda f)=\lambda I(f)$

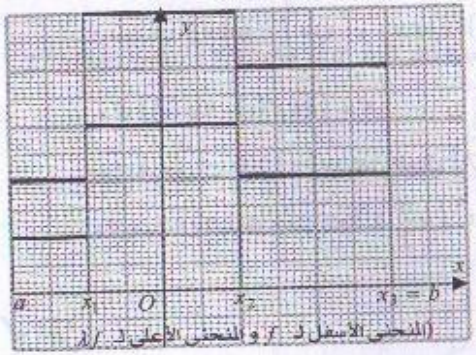
1) نفرض أن الدالة f درجية على المجال $[a\ ,\ b]$ إذن يوجد تقسيم لـ $[a\ ,\ b]$ مع $x_0=a$ و $x_n=b$ وبحيث من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ ؛ $f(x)=c_i$ مع $n\geq i\geq 1$

عندئذ من أجل كل x من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ ؛ $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda c_i$ وعليه λf ثابتة على كل مجال من هذه المجالات

إذن فالدالة λf درجية.

$$I(\lambda f)=\lambda c_1(x_1-x_0)+\ldots+\lambda c_n(x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda\left[c_1(x_1-x_0)+\ldots+c_n(x_n-x_{n-1})\right]=\lambda I(f)$$

2) نفرض أن f دالة مستمرة على المجال $[a\ ,\ b]$



(المنحنى الأسفل لـ f و المنحنى الأعلى لـ g)

عندئذ من أجل كل n من IN^* توجد دالتان درجيتان g_n و h_n بحيث من أجل كل t من $[a\ ,\ b]$ يكون $h_n(t)\geq f(t)\geq g_n(t)$

و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

- لما $\lambda\geq 0$ فإنه من أجل كل t من $[a\ ,\ b]$ و كل n من IN^* يكون:

$\lambda h_n(t)\geq \lambda f(t)\geq \lambda g_n(t)$

لنبين ان المتتاليتين $(I(\lambda g_n))$ و $(I(\lambda h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية

بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$. و بما أن g_n و λg_n دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n)=\lambda I(g_n)$ من أجل كل $n\geq 1$

و بالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.

بنفس الكيفية نبين ان $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f)=\lambda I(f)$.

- بضرب المتباينة $h_n(t)\geq f(t)\geq g_n(t)$ بالعدد λ لما $\lambda<0$ نجد

$\lambda g_n(t)\geq \lambda f(t)\geq \lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $I(\lambda f)=\lambda I(f)$.

3) لما $a\geq b$ فإنه من التعريف :

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt=-\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt \quad \text{و} \quad \int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$$

و حسب النتيجة السابقة $\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt=\lambda\int_b^a f(t)\,dt$

إذن $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt=-\int_b^a (\lambda f)(t)\,dt=-\lambda\int_b^a f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt$

أي $I(\lambda f)=\lambda I(f)$

مثال ـ ◆

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[2\ ,\ 7]$ إذا علمت أن :

$I=\int_2^3 f(x)\,dx=-5$ و $J=\int_7^3 f(x)\,dx=3$ و $K=\int_2^7 g(x)\,dx=13$

1) احسب $L=\int_2^7 f(x)dx$ و $M=\int_2^7 (f+g)(x)dx$ و

$N=\int_2^7 (4f(x)-5g(x))\,dx$

ب) نفرض ان $g(x)\rangle 0$ على المجال $[2,7]$ و المنحني البياني لـ g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4,5} g(x)dx$.

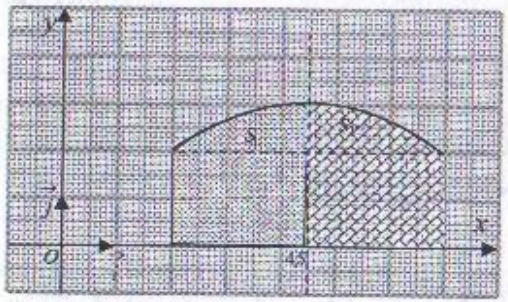
✓ الحل

1) $L=\int_2^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_7^3 f(x)dx=I-J=-8$

$M=\int_2^7 (f+g)(x)dx=\int_2^7 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx=L+K=-8+13=5$

$N=\int_2^7 4f(x)dx-\int_2^7 5g(x)dx$

$=4\times L-5K=-32-65=-97$



ب) $S_1=\int_2^{4,5} g(x)dx$

$S_2=\int_{4,5}^{7} g(x)dx$

بما ان المنحني الممثل للدالة g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=4,5$

فإن $S_1=S_2$ و $S_1+S_2=13$ ومنه $S_1=\frac{13}{2}$

2 - 4 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I، و ليكن a و b عددين حقيقيين من I.

1) إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge 0$.

2) إذا كان $a\le b$ و $f\ge g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge\int_a^b g(t)dt$.

الإثبات

1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

2) من الفرض $f\ge g$ نستنتج ان $f-g\ge 0$ على المجال $[a,b]$ وعليه $I(f-g)\ge 0$ لكن $I(f-g)=I(f)-I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\ge 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

مثال - ◆

عين إشارة التكامل $I=\int_0^1 (x^2-1)\,dx$ و $J=\int_1^2 (x^2-1)\,dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة I نعين إشارة الدالة f المعرفة على $[0,2]$ بـ $f(x)=x^2-1$

- إذا كان $x\in[0,1]$ فإن $f(x)\le 0$ إذن $-f(x)\ge 0$ وحسب الخطية $\int_0^1 -f(x)dx\ge 0$ وعليه نستنتج $\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx\le 0$

- إذا كان $x\in[1,2]$ فإن $f(x)\ge 0$ ومنه $\int_1^2 f(x)dx\ge 0$.

2 - 5 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة ❶

f دالة مستمرة على مجال I، و ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين من I، عندئذ يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(c)$.

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f بين a و b

الإثبات

نفرض أن الدالة f متزايدة.

الحالة الأولى $a < b$

- بما أن f متزايدة فإنه من أجل كل x من $[a\,,b]$ فإن $f(a) \le f(x) \le f(b)$

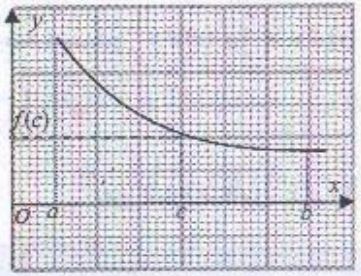
ومنه نستنتج $f(a)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f(b)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(a) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(b)$.

- بما أن f متزايدة ومستمرة على $[a\,,b]$

فإنه يوجد عدد حقيقي c من $[a\,,b]$

بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.



الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

و بما أن $b < a$ فإنه يوجد c محصور بين a و b بحيث $\int_b^a f(x)dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x)dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

مبرهنة 2

f دالة مستمرة على مجال I ، و ليكن m و M عددين حقيقيين مختلفين، و ليكن ايضا a و b عددين حقيقيين من I بحيث $a \le b$.

إذا كانت $m \le f(x) \le M$ على المجال $[a\,,b]$ فإن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$

الإثبات

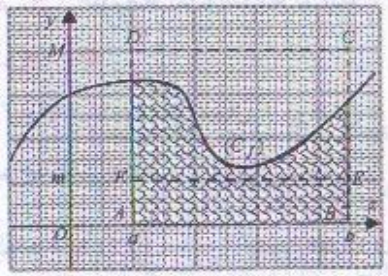
من اجل كل x من $[a\,,b]$ لدينا ،

$m \le f(x) \le M$ (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a\,,b]$

إذن $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$ و $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$

وبما أن $a \le b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على



$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

نتيجة

f دالة مستمرة على مجال I و ليكن a و b عددين كيفيين من I وليكن M عدد حقيقي موجب.

إذا كانت $|f(x)| \le M$ على $[a\,,b]$ او $[b\,,a]$

فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,|b-a|$

مبرهنة

1) f دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a\,,b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$

2) إذا كانت f تنعدم عند c من $[a\,,b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a\,,c]$ وموجبة على $[c\,,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)dx$

الإثبات

1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$$

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = -\int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)dx$

ملاحظة

1) إذا كانت f سالبة على مجال I فإن تكامل f على I هو نظير مساحة حيز من المستوي فوق المنحنى الممثل للدالة f

2) إذا غيرت f إشارتها على I نجزئ المجال I إلى مجالات جزئية بحيث الدالة f لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

تمرين تدريبي ❶

بين ان 1) $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 2$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمرتان على $\mathbb{R}$ إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

1) من اجل كل t من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $0 \le \cos t \le 1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt$ لكن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$

2) بما ان $0 \le x \le 1$ فإن $0 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 2x \le 2$ و منه

$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le \int_0^1 2\,dx$

لكن $\int_0^1 2\,dx = 2(1-0) = 2$ إذن $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 2$.

تمرين تدريبي ❷

f دالة معرفة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x-1$ و (d) تمثيله البياني في معلم متعامد و متجانس.

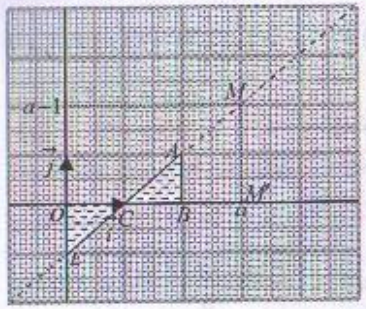
1) احسب التكامل $I = \int_0^2 f(x)dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ f على $[0,2]$.

ب) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a > 2$ و M نقطة من (d) ذات الفاصلة a،

احسب $S(a) = \int_2^a f(x)dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

1) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$



بما ان f سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 f(x)\,dx$

هو نظير مساحة المثلث OEC التي تساوي $\frac{1}{2}$

ومنه $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

بما ان f موجبة على $[1,2]$ فإن $\int_1^2 f(x)dx$

هي مساحة المثلث ACB و التي تساوي 1

ومنه $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ إذن $I = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0,2]$ هي M حيث

$M = \frac{1}{b-a}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ب) بما ان f موجبة على $[2,a]$ فإن $\int_2^a f(x)\,dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

والتي تساوي $\frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$ اي $\frac{a(a-2)}{2}$

إذن $S(a) = \int_2^a f(x)dx = \frac{a(a-2)}{2}$

الدالة S قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$.

❸ - دوال أصلية لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $I = [a,b]$ يشمل α

مهما يكن العدد الحقيقي x من I، فإن الدالة F المعرفة بـ $F: x \mapsto \int_\alpha^x f(t)dt$

قابلة للاشتقاق على I و لدينا $F'(x) = f(x)$.

الإثبات

نفرض أن f متزايدة تماما و موجبة على مجال $[a,b]$ و ليكن α و $\alpha+h$ عددين حقيقيين من $[a,b]$.

لدينا $F(\alpha)=\int_a^{\alpha} f(t)dt$ و $F(\alpha+h)=\int_a^{\alpha+h} f(t)dt$.

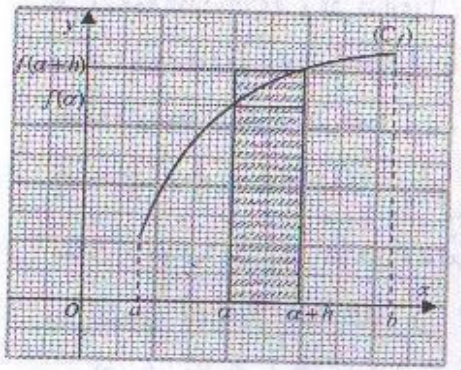
مساحة الحيز المشطب هي :

$h<0$ ⊔⊓ $F(\alpha)-F(\alpha+h)$ و $h>0$ ⊔⊓ $F(\alpha+h)-F(\alpha)$

لدينا $h\times f(\alpha) \le F(\alpha+h)-F(\alpha) \le h\times f(\alpha+h)$

ومنه نستنتج $f(\alpha) \le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \le f(\alpha+h)$ (في حالة h موجبة)

و $f(\alpha+h) \le \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \le f(\alpha)$ (في حالة h سالب)



و بما أن f مستمرة عند α

فإن $\lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=f(\alpha)$

و حسب نظرية الحصر

فإن $\lim_{h\to 0} \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=f(\alpha)$

لكن $\lim_{h\to 0} \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=F'(\alpha)$

و عليه $F'(\alpha)=f(\alpha)$ من اجل كل α من $[a\,,\,b]$.

بطريقة مماثلة نبين ان $F'(\alpha)=f(\alpha)$ في حالة f متناقصة تماما على I.

3 - 1 تعريف

كل دالة F قابلة للاشتقاق على مجال I وبحيث انه من اجل كل x من I يكون $F'(x)=f(x)$. هي دالة اصلية لدالة f على مجال I

مثال . ◆

1) f و g دالتان معرفتان على $]0\,,+\infty[$ بـ :

$f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=Ln\,x$

من اجل كل x من $]0\,,+\infty[$ لدينا $g'(x)=f(x)$

ومنه g دالة اصلية للدالة f على $]0\,,+\infty[$.

2) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\cos x$ و $f(x)=-\sin x$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f(x)$

ومنه g اصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

3 - 2 العلاقة بين دالتين أصليتين لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I.

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن الدالة f تقبل ما لا نهاية من الدوال الأصلية.

من الشكل $G(x)=F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

لدينا فرضا F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x)=f(x)$

- الدالة G قابلة للاشتقاق على I و بحيث $G'=F'=f$

إذن G دالة اصلية لـ f على I.

وبالعكس إذا كانت G دالة اصلية لـ f على I فإن $G'=f=F'$

وعليه $G'-F'=0$ ومنه $G-F$ ثابتة

اي $G(x)-F(x)=k$ ومنه $G(x)=F(x)+k$.

مثال . ◆

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=x^2=f(x)$

منه g دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و بالتالي كل الدوال G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ حيث k عدد حقيقي هي دوال أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

3 - 3 الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة للمتغير

مبرهنة

x_0 عدد حقيقي من مجال I و y_0 عدد حقيقي كيفي

عندئذ توجد دالة أصلية وحيدة G لـ f على I بحيث $G(x_0)=y_0$.

الإثبات

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل دالة أصلية أخرى G لـ f تكتب على الشكل $G(x)=F(x)+k$ مع k عدد حقيقي و لكون $G(x_0)=y_0$ نجد $F(x_0)+k=y_0$

ومنه $k=y_0-F(x_0)$

إذن k وحيد و بالتالي توجد دالة اصلية و حيدة تحقق الشرط $G(x_0)=y_0$.

مثال . ◆

$f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

الدوال الأصلية للدالة f هي من الشكل $G(x)=\frac{1}{3}x^3+k$ مع k عدد حقيقي

و الآن نبحث عن الدالة الأصلية التي تحقق $G(1)=2$.

$G(1)=2$ تكافئ $\frac{1}{3}\times 1^3+k=2$ تكافئ $k=\frac{5}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $G(1)=2$ هي $G(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}$

3 - 4 الدالة الأصليّة لدالة مستمرة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I

عندئذ فالدالة $F: x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I بحيث $F(a)=0$

تمرين تدريبي ❶

F دالة معرفة بـ $F(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

1) عين مجموعة تعريف الدالة F.

ب) احسب $F'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة F ثم عين إشارتها.

✓ الحل

1) الدالة $t\mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي $D_F=\mathbb{R}$.

ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

وبما أن $e^{-\frac{x^2}{2}}>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

فإن $F'(x)>0$

وبالتالي F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $F(0)=\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$

وعليه إذا كان $x<0$ فإن $F(x)<0$

و إذا كان $x>0$ فإن $F(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	0	↗

تمرين تدريبي ❷

لتكن t دالة معرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بـ $t(x)=\tan x$

1) عين المشتقة t' للدالة t.

ب) إستنتج الدالة الأصلية للدالة $h: x\mapsto \tan^2 x$ و التي تنعدم من أجل $x=\frac{\pi}{4}$

✓ الحل

1) الدالة t قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و لدينا $t'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ب) لدينا $\tan^2 x=t'(x)-1$ ومنه الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \tan^2 x$ هي الدوال $G(x)=t(x)-x+k$ حيث k عدد حقيقي.

$G\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ يكافئ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}+k=0$ يكافئ $k=\frac{\pi}{4}-1$

إذن الدالة الأصلية المطلوبة هي $G(x)=\tan(x)-x+\frac{\pi}{4}-1$.

4 - حساب الدوال الأصلية

1 - 4 دوال أصلية لدوال شهيرة

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين f و g على التوالي على مجال I

فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I.

- إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على I و λ عدد حقيقي

فإن λF أصلية لـ λf على I

- نفس النتائج المعروفة حول مشتقات الدوال الشهيرة وبقراءة مقلوبة تعطي لنا الدوال الأصلية كما في الجدول التالي:

الدالة f	الأصلية F	على المجال $I=\ldots$
ثابت a	ax	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ (n صحيح سالب و يختلف عن -1)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$

$\frac{1}{x}$	$Ln\,x$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\,,k\in\mathbb{Z}$

4 - 2 دساتير عامة

معرفة مشتق بعض الدوال المركبة يسمح لنا بتعيين دوال أصلية لدوال أخرى و الجدول التالي يلخص هذه الحالات مع U دالة قابلة للاشتقاق على I.

الدالة f	الأصلية F	ملاحظة
$U'U^n\ (n\in\mathbb{Z}-\{-1\})$	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}$	n لـ -1 من أجل كل x من I $U(x)\neq 0$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$	على I $U>0$
$\frac{U'}{U}$	$Ln\lvert U\rvert$	$U\neq 0$
$U'e^U$	e^U	
$x\mapsto U(ax+b)$	$x\mapsto\frac{1}{a}g(ax+b)$	g دالة أصلية للدالة U على I

تمرين تدريبي

عين الدالة الأصلية F على I من أجل كل دالة f مستمرة على المجال المعطى

1) $f(x)=(2x-1)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ب) $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$ ، $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

ج) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$ د) $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{3x^2+3}}$ ، $I=\mathbb{R}$

✓ الحل

نكتب f على شكل αg حيث α عدد حقيقي و g دالة نعرف دالتها الأصلية باستعمال الدساتير العامة و الأشكال التي نبحث عنها هي من الشكل :

$f=\alpha U'U^n$ ، $f=\alpha\frac{U'}{U}$ ، $f=\alpha\frac{U'}{\sqrt{U}}$ ، $f=\alpha U'e^U$

1) نضع $U(x)=2x-1$ و بالتالي $f(x)=(U(x))^3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2$

إذن $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times(U(x))^3=\frac{1}{2}\times U'(x)\times(U(x))^3$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ هي F حيث $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^4}{4}=\frac{U^4}{8}$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4$

ب) نضع $U(x)=2x-1$ وبالتالي $f(x)=\frac{1}{U^3(x)}$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و لدينا $U'(x)=2$

وبالتالي $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}\times\frac{U'(x)}{(U(x))^3}=\frac{1}{2}U'(x)\times(U(x))^{-3}$

إذن فالدالة الأصلية على I هي $F=\frac{1}{2}\times\frac{U^{-2}}{-2}=\frac{-1}{4}U^{-2}$

ومن أجل كل x من I يكون $F(x)=\frac{-1}{4(2x-1)^2}$

ج) نضع $U(x)=x^2+1$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=2x$

وبالتالي $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{2}\frac{U'(x)}{U(x)}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ f هي F حيث $F(x)=\frac{3}{2}Ln\lvert U(x)\rvert$

وبما أن $U(x)>0$ فإن $F(x)=\frac{3}{2}Ln\,U(x)$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{3}{2}Ln(x^2+1)$

د) نضع $U(x)=3x^2+3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $U'(x)=6x$

وبالتالي $f(x)=\frac{5}{6}\times\frac{6x}{\sqrt{3x^2+3}}=\frac{5}{6}\times\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$

إذن فالدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ لـ f هي $F=\frac{5}{3}\sqrt{U}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $F(x)=\frac{5}{3}\sqrt{3x^2+3}$.

5 - حساب التكامل

5 - 1 حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة اصلية كيفية للدالة f على I

و إذا كان a و b عددين حقيقيين من I فإن $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

الإثبات

الدالة $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي دالة اصلية لـ f على I بحيث $G(a)=0$

إذا كانت F دالة اصلية كيفية لـ f على I فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت k بحيث من

أجل كل x من I لدينا $G(x)=F(x)+k$

و بما أن $G(a)=0$ فإن $k=-F(a)$

إذن من اجل كل x من I يكون $G(x)=F(x)-F(a)$

و باختيار $x=b$ نحصل على $G(b)=F(b)-F(a)$

اي $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

ملاحظة

نكتب الفرق $F(b)-F(a)$ على الشكل $[F(x)]_a^b$

و كذلك $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

مثال .

1) على $\mathbb{R}$ الدالة $x \mapsto \sin x$ لها دالة اصلية هي $x \mapsto -\cos x$ و منه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos 0)=1$$

2) على $\mathbb{R}$ الدالة $x \mapsto x^2+x+1$ لها دالة اصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$ و منه

$$\int_0^1 \left(t^2+t+1\right)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-(0)=\frac{11}{6}$$

5 - 2 التكامل بالتجزئة

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على I بحيث مشتقتاهما U' و V' مستمرتان على I

عندئذ من اجل كل عددين حقيقيين a و b من I يكون :

$$\int_a^b U(t)\,V'(t)dt = \left[U(t)\,V(t)\right]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt$$

الإثبات

الدالة $U\times V$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $(U\times V)' = U'\times V + U\times V'$

ومنه $UV' = (UV)' - U'V$

بما أن الدوال UV' ، $(UV)'$ و $U'V$ مستمرة على I فإن :

$$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b \left[(UV)'(t) - (U'V)(t)\right]dt$$ و حسب خطية التكامل نجد

$$\int_a^b (UV')(t)\,dt = \int_a^b (UV)'(t)\,dt - \int_a^b (U'V)(t)dt \quad \text{.....} \quad (1)$$

لكن UV هي الدالة الأصلية لـ $(U\times V)'$ على I

إذن $\int_a^b (UV)'(t)dt = \left[U(t)V(t)\right]_a^b$

ومنه المساواة (1) تكتب على الشكل :

$$\int_a^b (U)(t)\,V'(t)\,dt = \left[U(t)\,V(t)\right]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)dt \quad \text{.....} \quad (2)$$

تسمى المساواة (2) دستور التكامل بالتجزئة.

مثال .

احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$

الحل

التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$ من الشكل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} U(t)V'(t)dt$ مع $U(t)=t$ و $V'(t)=\sin t$

ومنه نجد $U'(t)=1$ و $V(t)=-\cos t$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و مشتقتاهما U' و V' مستمرتان على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وحسب دستور المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\cos 0)\right] - \left[\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) - (-\sin 0)\right] = 1$$

تمرين تدريبي ❶

1) احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

ب) احسب قيمة التكامل $J = \int_0^{1} xe^x\,dx$

✓ الحل

الدساتير العامة لا تسمح لنا بتعيين الدالة الأصلية للدالتين $x \mapsto x\cos x$ و $x \mapsto xe^x$.

1) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = \cos x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = \sin x$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و U' و V' مستمرتان على $\mathbb{R}$

وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد $I = \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$$= \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = (0) - (0) - [1-(-1)] = -2$$

ب) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = e^x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = e^x$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و U' و V' مستمرتان على $\mathbb{R}$

إذن حسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$J = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

تمرين تدريبي ❷

أوجد دالة أصلية على المجال $]0, +\infty[$ للدالة $f : x \mapsto Ln\,x$

✓ الحل

بما أن الدالة f مستمرة على $]0, +\infty[$ فإنها تقبل دالة أصلية من الشكل:

$F : x \mapsto \int_1^x Lnt\,dt$ و $F(1) = 0$ ونكتب $F(x) = \int_1^x 1\times Lnt\,dt$

بوضع $U'(t) = 1$ و $V(t) = Ln(t)$ نجد $U(t) = t$ و $V'(t) = \frac{1}{t}$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و دالتاهما المشتقتان U' و V' مستمرتان على $]0, +\infty[$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$F(x) = \int_1^x 1\times Lnt\,dt = \left[t\,Lnt\right]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \left[t\,Lnt\right]_1^x - \int_1^x 1\,dt = \left[t\,Lnt\right]_1^x - \left[t\right]_1^x = x\,Ln(x) - x + 1$$

إذن الدالة $x \xrightarrow{F} x\,Ln(x) - x + 1$ اصلية للدالة $x \mapsto Ln\,x$ على المجال $]0, +\infty[$ بحيث $F(1) = 0$

لاحظ أنه إذا أضفنا -1 إلى الدالة F نحصل على دالة اصلية أخرى لـ $x \mapsto Ln\,x$ هي :

$x \mapsto x\,Ln(x) - x$

❻ - تطبيقات الحساب التكاملي

6 - 1 حساب مساحة حيز من مستو

تعريف التكامل لدالة مستمرة يسمح لنا بحساب مساحة حيز من مستو محدود بمنحني هذه الدالة.

خواص

1) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $f(x) \geq y \geq 0$ هي $\int_a^b f(x)dx$

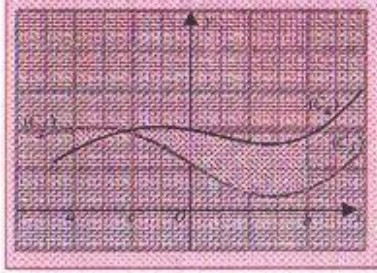
2) إذا كانت f دالة مستمرة و سالبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $0 \geq y \geq f(x)$ هي $-\int_a^b f(x)dx$

3) إذا كان لدينا $f(x) \leq g(x)$ على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $g(x) \geq y \geq f(x)$ هو $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

ملاحظة

1) لحساب المساحة المحصورة بين منحنيين لدالتين g و f على $[a\,.b]$ نتبع ما يلي :
- نجزئ هذا المجال إلى مجالات جزئية بحيث فرق الدالتين يحافظ على إشارة ثابتة.
- نكامل دالة الفرق و نراعي العلاقة الموجودة بين التكامل و المساحة.

$$A = -\int_a^c (g(x)-f(x))dx + \int_c^b (g(x)-f(x))dx$$



2) في معلم متعامد و متجانس
وحدة المساحة هي مساحة المربع الذي طوله
ضلعه $\left\|\vec{i}\right\|$ اما في معلم متعامد وحدة المساحة
هي مساحة المستطيل
الذي ابعاده $\left\|\vec{i}\right\|$ و $\left\|\vec{j}\right\|$

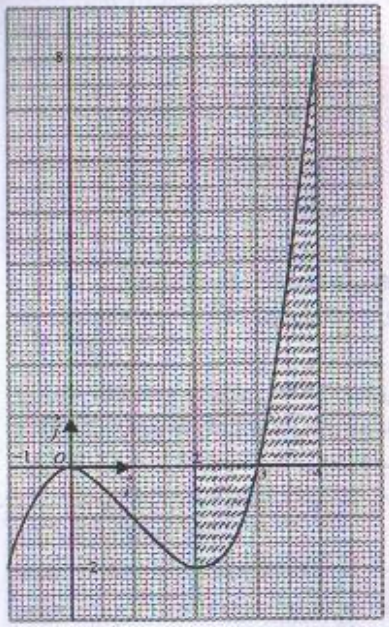
مثال - ◆

f دالة معرفة على المجال $[-1,\ 4\]$ بحيث $f(x) = \frac{1}{2}(x^3-3x^2)$
و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) ارسم (γ) على المجال $[-1\ ,\ 4\]$.
2) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (γ) و محور الفواصل $(x'x)$
و المستقيمين اللذين معادلاتاهما $x=2$ و $x=4$.

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-1,\ 4\]$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-6x)$
$f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $x=2$
- إذا كان $x\in[-1\ ,\ 0\][\cup]2\ ,\ 4]$ فإن f متزايدة تماما.
- إذا كان $x\in[\ 0\ ,\ 2\]$ فإن f متناقصة تماما.
و منه جدول تغيرات f على $[-1,\ 4\]$ هو

x	-1		0		2		4
إشارة $f'(x)$	$.$	$+$	0	$-$	0	$+$	
تغيرات f		$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	8

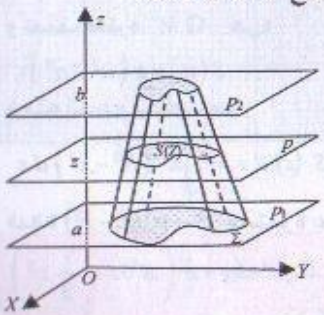


2) على المجال $[\ 2\ ,\ 3\]$ يكون $f(x)\le 0$
و على المجال $[\ 3\ ,\ 4\]$ يكون $f(x)\ge 0$
و منه المساحة المطلوبة
هي $\mathcal{A} = \left(-\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)dx\right)$
الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto f(x)$ هي :
$x\mapsto \frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3$ و منه

$$\mathcal{A} = -\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_2^3 + \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_3^4$$
$$= \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

2 - 6 حساب الحجوم :

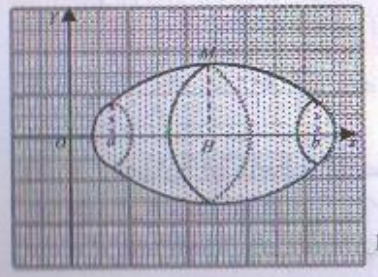
نعتبر مجسما Σ محدودا بالمستويين المتوازيين (p_1)
و (p_2) ذوي المعادلتين $Z=a$ و $Z=b$
على التوالي في معلم متعامد و متجانس و ليكن V
حجم هذا المجسم و $S(Z)$ مساحة مقطع منه
بالمستوي (p) الموازي لـ (p_1) و (p_2) معادلته $Z=\alpha$ مع $b\ge\alpha\ge a$.



حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V=\int_a^b S(z)\,dz$
وحدة الحجوم هي حجم متوازي المستطيلات القائم
الذي احرفه $\left\|\vec{i}\right\|$ ، $\left\|\vec{j}\right\|$ ، $\left\|\vec{k}\right\|$.

مجسم دوراني محوره $(x'x)$

ليكن (γ) قوس من منحنى الممثل للدالة f
حيث $y=f(x)$ مع $f(x)\ge 0$ على $[a\ ,\ b]$.
بتدوير (γ) حول $(x'x)$ فإن القوس (γ) يولد
مساحة دوارنية محورها $(x'x)$ و هذه المساحة تحدد
مجسما دورانيا.
و مقطع هذا المجسم بمستوي عمودي
على $(x'x)$ يعطي قرصا مساحته πHM^2
اي $\pi(f(x))^2$ حيث $M(x,f(x))$ نقطة من (γ)
و حجم هذا المجسم يعطى بالعلاقة $V=\int_a^b a f^2(x)dx$



ملاحظة

من اجل مجسم دوراني محوره $(x'x)$ فإن العلاقة $V=\int_a^b a\,f^2(x)dx$ تستنتج و هذا بتصورنا المحور $(x'x)$ في مكان $(z'z)$

مثال .◆

أوجد الدستور الذي يعطي حجم كرة نصف قطرها R .

✓ الحل

في معلم متعامد و متجانس للفضاء نعتبر الكرة التي مركزها o و طول نصف قطرها R .
إذا أخذنا مقطع كرة بمستوي ذي المعادلة $Z=a$
مع $-R\langle a\langle R$ نحصل على دائرة مركزها
Ω ينتمي إلى $(z'z)$ نصف قطرها ΩM .
و في المثلث القائم $O\Omega M$
لدينا $O\Omega^2+\Omega M^2=OM^2$
ومنه $\Omega M^2=OM^2-O\Omega^2=R^2-a^2$.
مساحة القرص الذي مركزه Ω
و نصف قطره ΩM هي:

$$S(a)=\pi\left(R^2-a^2\right)$$

و منه الحجم المطلوب هو ،

$$V=\int_{-R}^{R}S(z)\,dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$$

الدالة $z\mapsto\pi\left(R^2-z^2\right)$ مستمرة على $[-R\ ,\ R]$ و دالتها الأصلية هي:

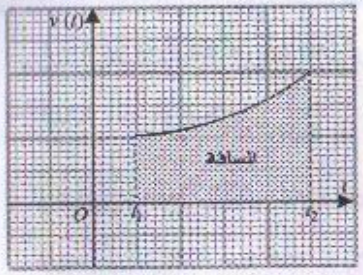
$$z\mapsto\pi\left(R^2z-\frac{1}{3}z^3\right)$$

و منه $V=\left[\pi\left(R^2z-\frac{1}{3}z^3\right)\right]_{-R}^{R}=\pi\left(+R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)$

$$=\pi\left[+\frac{2}{3}R^2+\frac{2}{3}R^3\right]=\frac{4}{3}\pi R^3$$

6 - 3 العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة و السرعة المتوسطة

- إذا علمنا أن السرعة اللحظية $V(t)$ لمتحرك بدلالة الزمن t فإن المسافة المقطوعة $d(t_1,t_2)$ لهذا المتحرك بين اللحظتين t_1 و t_2 هي :



$$d(t_1\ ,\ t_2)=\int_{t_1}^{t_2}V(t)\,dt$$

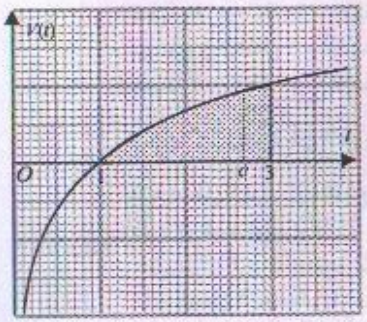
- السرعة المتوسطة V_M بين اللحظتين t_1 و t_2 هي :

$$V_M=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt$$

مثال .◆

من أجل كل $0\langle t$ ، السرعة اللحظية لمتحرك هي $V(t)=Ln\,t$
احسب المسافة المقطوعة من طرف المتحرك بين اللحظتين $t_1=1$ و $t_2=3$ ثم
احسب السرعة المتوسطة له.

✓ الحل



$$d(t_1\ ,t_2)=\int_1^3V(t)dt=\left[t\,Ln(t)-t\right]_1^3$$

$$=(3\,Ln(3)-3)-(0-1)$$

$$d=3\,Ln(3)-2\approx1,3\,m$$

$$V_m=\frac{1}{3-1}\int_1^3V\,Ln(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\times1,3\approx0,65\,m/s$$

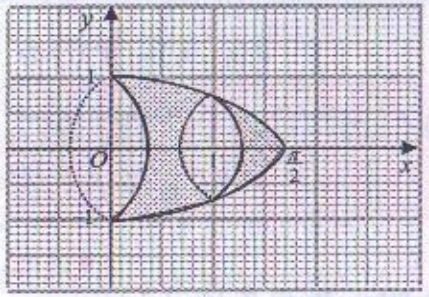
تمرين تدريبي . ❶

(γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\cos x$ المعرفة على المجال $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.
أ) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (γ) و محور الفواصل .
ب) احسب الحجم المولد بدوران المنحني (γ) حول المحور $(x'x)$

✓ الحل

أ) الدالة cos موجبة على المجال $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

و المساحة المطلوبة هي $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$



$$S=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

ب) الدالة cos موجبة على $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

و الحجم المطلوب يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\,dx$

لدينا $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\cos^2 x$ هي الدالة F حيث:

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\quad\text{إذن}\quad V=\pi\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)\right)=\pi\times\frac{1}{4}\pi=\frac{\pi^2}{4}$$

تمرين تدريبي . ❷

لنعتبر هرم $OABC$ (مثلث الأوجه) كما هو موضح في الشكل ، ارتفاعه $[OH]$

حيث $OH=h$ و S مساحة القاعدة ABC .

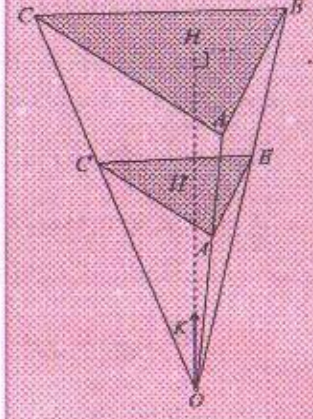
لتكن H' نقطة من المحور $\left(O\ ,\ \vec{k}\right)$

تقع داخل الهرم. و مقطع الهرم بالمستوي الموازي للمستوي (ABC) و المار من H' هو مثلث $A'B'C'$. نضع $OH'=Z$

1) استعمل التحاكي الذي مركزه O لإثبات أن الساحة $S(z)$ للمقطع $A'B'C'$ هي :

$$S(z)=S\times\frac{z^2}{h^2}$$

2) احسب حجم الهرم بدلالة S و h



✓ الحل

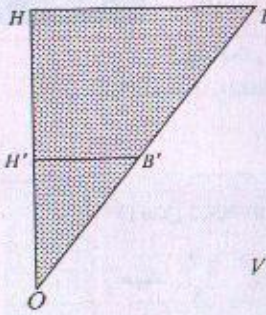
1) $\frac{OH'}{OH}=\frac{z}{h}=k$ منه $OH'=k\,OH$ و بما أن $\overrightarrow{OH}$ و $\overrightarrow{OH'}$ لهما نفس الإتجاه

فإن $\overrightarrow{OH'}=k\,\overrightarrow{OH}$ و هذا يعني H' صورة H بالتحاكي الذي مركزه النقطة O

و نسبته $k=\frac{z}{h}$

$(HB)\perp(OH)$ و $(OH')\perp(H'B')$ و $(HB)\perp(H'B')$

حسب نظرية طاليس $\frac{OH'}{OH}=\frac{OB'}{OB}=k$ و هذا يعني أن B' صورة B بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته k



بنفس الطريقة نبين أن A' صورة A و C' صورة C

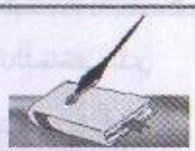
إذن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتحاكي

الذي مركزه النقطة O و نسبة $k=\frac{z}{h}$

إذا كانت S مساحة ABC و $S(z)$ مساحة $A'B'C'$

فإن $S(z)=k^2\,S$ و منه $S(z)=\frac{z^2}{h^2}S$

2) $V=\int_0^h S(z)dz=\int_0^h S\,\frac{z^2}{h^2}\,dz=S\int_0^h\frac{z^2}{h^2}\,dz=\frac{Sh}{3}$



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 حساب تكامل دالة درجية

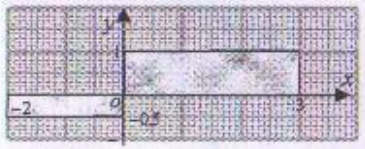
1) مثل الدالة الدرجية f ثم احسب التكامل $I(f)$ على $[-2\ ,\ 3]$

حيث $\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2} & , \ -2 \leq x < 0 \\ f(x) = +1 & , \ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

2) مثل الدالة f المعرفة على $[0\ ,\ 3]$ بـ $f(x) = E(x) - x$ حيث E دالة الجزء الصحيح ثم احسب التكامل $I(f)$ على المجال $[0\ ,\ 3]$

✓ الحل

الدالة f سالبة على المجال $[-2\ ,\ 0]$ و منه $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي ابعاده 2 و $\frac{1}{2}$



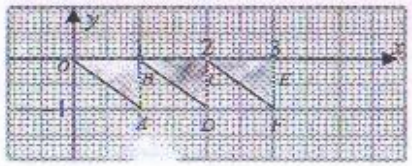
اي $I(f) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

الدالة f موجبة على المجال $[0\ ,\ 3]$

و منه $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي ابعاده 3 و 1 اي $I(f) = 1 \times 3 = 3$

تكامل الدالة f على المجال $[-2\ ,\ 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا اي $3 - 1 = +2$

2) $\begin{cases} f(x) = -x & , \ x \in [0\ ,\ 1[\\ f(x) = 1 - x & , \ x \in [1\ ,\ 2[\\ f(x) = 2 - x & , \ x \in [2\ ,\ 3[\end{cases}$



- الدالة f سالبة على المجال $[0,1[$

و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي 1- على $[0,1[$

- الدالة f سالبة على المجال $[1\ ,\ 2[$

و بالتالي $I(f)$ يساوي 1-

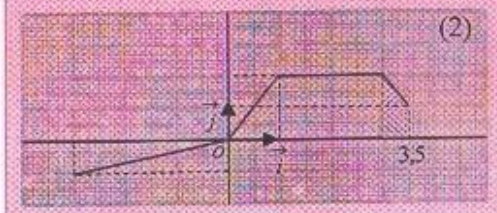
- الدالة f سالبة على المجال $[2\ ,\ 3[$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي 1-

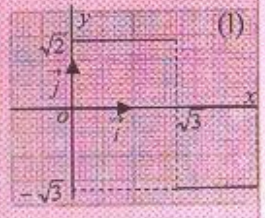
و عليه فالتكامل f على $[0,3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا اي

$-3 = -1 - 1 - 1$

تطبيق 2 حساب تكامل دالة درجية و تكامل دالة تآلفية بالقطع

1) الشكل (1) يمثل التمثيل البياني لدالة درجية
عين عبارة $f(x)$ ثم احسب التكامل f على مجال تعريفها.
2) الشكل (2) يمثل المنحنى البياني لدالة تآلفية بالقطع. احسب التكامل $I(f)$ باستعمال المساحة





✓ الحل

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2} & , \ \sqrt{3} < x \leq 0 \\ f(x) = -\sqrt{3} & , \ 3 \geq x \geq \sqrt{3} \end{cases}$

f موجبة على المجال $]0\ ,\ \sqrt{3}]$ و بالتالي $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي ابعاده $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ منه $I(f) = \sqrt{6}$

f سالبة على المجال $[\sqrt{3}\ ,\ 3]$ و بالتالي $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي ابعاده $(3 - \sqrt{3})$ و $\sqrt{3}$ و بالتالي $I(f) = -\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})$

إذن تكامل f على $[0\ ,\ 3]$ يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا اي

$I(f) = \left[\sqrt{6} - \sqrt{3}(3 - \sqrt{3})\right]$

2) - الدالة f سالبة على المجال $[-3\ ,\ 0]$ و بالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث التي تساوي $\frac{3}{2}$ منه $I(f) = -\frac{3}{2}$

- الدالة f موجبة على المجال $[0\ ,\ 3]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة شبه المنحرف الذي طول قاعدته الكبرى 3 و الصغرى 2 و ارتفاعه 2 و تساوي

$\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$

إذن $I(f) = 5$

- الدالة f موجبة على المجال $[3\ ,\ 3,5]$ و بالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة مثلث الذي قاعدته 0,5 و وارتفاعه 1 و تساوي $\frac{1 \times 0,5}{2} = \frac{1}{4}$ ومنه $I(f) = \frac{1}{4}$

إذن التكامل $I(f)$ على المجال $[-3\ ,\ 3,5]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا و تساوي $\frac{15}{4} = \frac{-3}{2} + 5 + \frac{1}{4}$

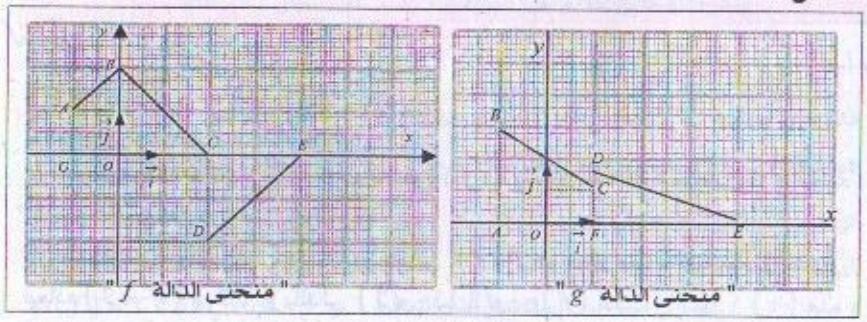
تطبيق 3 حساب تكامل دالة تآلفية بالقطع

f و g دالتان تآلفيتان بالقطع معرفتان على المجال $[-1\ ,\ 4]$

بـ $\begin{cases} g(x)=-\frac{1}{2}x+1 & ,\ x\in[-1\ ,\ 1[\\ g(x)=-\frac{1}{4}x+1 & ,\ x\in[1\ ,\ 4] \end{cases}$ و $\begin{cases} f(x)=x+2 & ,\ x\in[-1\ ,\ 0] \\ f(x)=-x+2 & ,\ x\in]0\ ,\ 2] \\ f(x)=x-4 & ,\ x\in]2\ ,\ 4] \end{cases}$

احسب تكاملي f و g على $[-1\ ,\ 4]$

✓ الحل



- الدالة f موجبة على $[-1\ ,\ 0]$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAG$ التي تساوي 1,5 و منه $I(f)=1,5$

الدالة f موجبة على المجال $[0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة المثلث OBC التي تساوي 2 و منه $I(f)=2$

الدالة f سالبة على المجال $[2\ ,\ 4]$ و بالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث CDE التي تساوي 2 و منه $I(f)=-2$

إذن تكامل f على $[-1\ ,\ 4]$ هو المجموع الجبري للتكاملات و عليه $I(f)=\frac{3}{2}$ $2=\frac{3}{2}$

- الدالة g موجبة على $]-1\ ,\ 1]$ و بالتالي فإن $I(g)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $ABCF$ و التي تساوي 2,25 و منه $I(g)=2,25$

الدالة g موجبة على المجال $[1\ ,\ 4]$ و بالتالي $I(g)$ هي مساحة المثلث DFE و التي تساوي $\frac{9}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ ومنه $I(g)=\frac{9}{8}$ إذن تكامل g على $[-1,4]$ هو $\frac{27}{8} = \frac{9}{8} + 2,25$

تطبيق 4 حساب تكامل دالة تآلفية

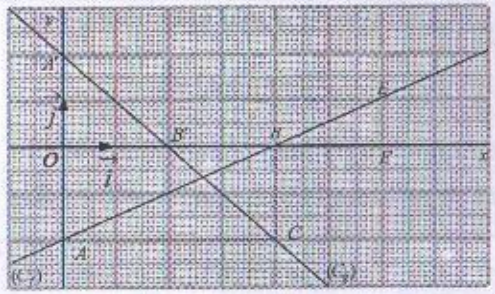
الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ و $g(x)=2-x$

1) ارسم (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس

2) باستعمال حساب المساحات احسب التكاملات التالية $\int_0^2 g(x)dx$ ،

$\int_2^4 g(x)dx$ ، $\int_0^4 f(x)dx$ ، $\int_4^6 f(x)dx$

✓ الحل



1) المنحنى الممثل للدالة f عبارة عن مستقيم يمر من النقط ،

$A(0,-2)$ ، $B(4,0)$ و $E(6,1)$.

المنحنى الممثل للدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقط :

$A'(0,2)$ ، $B'(2,0)$ و $C(4,-2)$

2) الدالة f موجبة ومستمرة على $[4,6]$

و بالتالي فإن تكامل f على $[4,6]$ تساوي مساحة المثلث $BE'E$

ومنه $\int_4^6 f(x)dx=1$

- الدالة f سالبة ومستمرة على المجال $[0,4]$

وبالتالي فإن تكامل f على $[0,4]$ هو نظير مساحة المثلث OBA التي تساوي 4

إذن $\int_0^4 f(x)dx=-4$

- الدالة g معرفة و موجبة على $[0\ ,\ 2]$ و بالتالي فإن تكامل g على $[0\ ,\ 2]$ تساوي مساحة المثلث $OB'A'$ التي تساوي 2 إذن $\int_0^2 g(x)dx=2$

- الدالة g سالبة على المجال $[2\ ,\ 4]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[2\ ,\ 4]$ هو نظير مساحة المثلث $B'BC$ التي تساوي 2

إذن $\int_2^4 g(x)dx=-2$

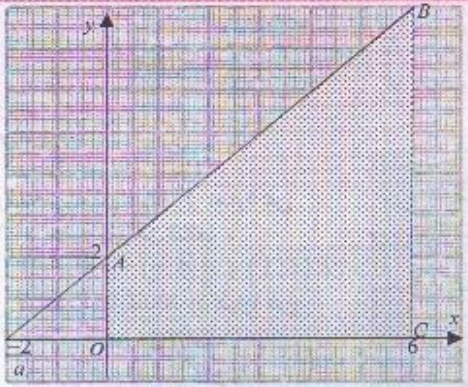
تطبيق 5 تعيين دالة علم تكاملها

1) أوجد دالة تالفية p بحيث $p : x \mapsto ax+2$ مع a ($a \neq 0$) التي تكاملها على المجال $[0,6]$ هي 16

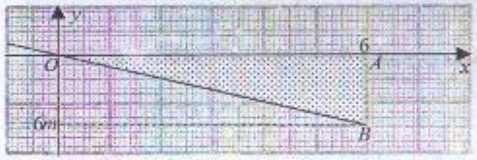
2) أوجد الدالة التالفية q بحيث $q : x \mapsto mx$ التي تكاملها على المجال $[0,6]$ يساوي -8 مع $m < 0$

✓ الحل

1) بما أن p موجبة على $[0,6]$
فإن تكامل p على $[0,6]$
يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAC$
و التي تساوي ،
$$\frac{(2+6a+2)\times 6}{2} = 18a+12$$
و بالتالي $18a+12=16$ منه نستنتج ،
$a=\frac{2}{9}$ إذن $p(x)=\frac{2}{9}x+2$



2) بما أن q سالبة على المجال $[0,6]$
فإن تكامل q على $[0,6]$ هو نظير
مساحة المثلث OAB التي تساوي $18|m|$
و بالتالي $18|m|=-(-8)$
أي $18|m|=8$ ومنه $m=\frac{-4}{9}$.

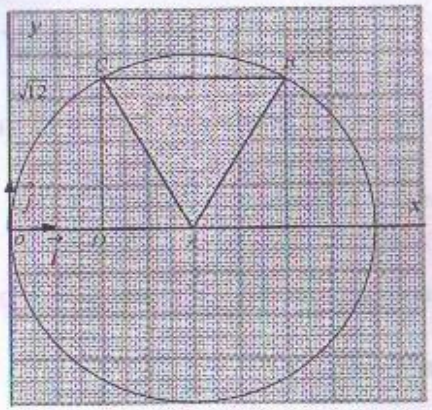


تطبيق 6 حساب التكامل بالاعتماد على مساحة قرص

1) بين أن الدائرة (C) التي مركزها النقطة $A(4,0)$ و المارة من مبدأ المعلم تكتب على الشكل $(x-4)^2+y^2=16$

2) نعتبر النقطتين B و C من الدائرة (C) فاصلتهما 5 و 3 على الترتيب
و بحيث ترتيبها موجبة. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) استنتج التكاملين التاليين و هذا باستعمال المساحات:
$$I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx \quad ، \quad J=\int_2^6 \sqrt{8x-x^2}\,dx$$



✓ الحل

1) الدائرة التي مركزها A و تمر من O هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث $AM=OA$
و بما ان $OA=4$ فإن $AM=4$
و عليه $(x-4)^2+y^2=16$.

2) $OC=4$ و $OB=4$
لأن C و B نقطتان من الدائرة (C)
ترتيب كل من B و C هو $\sqrt{12}$
و منه $BC=\sqrt{(6-2)^2+0^2}=4$
و منه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) حساب $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx$
الدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{8x-x^2}$ موجبة على المجال $[0,8]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[0,8]$ يساوي مساحة نصف القرص الذي مركزه A و نصف قطره 4 و التي تساوي $\frac{1}{2}\pi \times 4^2$ اي 8π

إذن $I=\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx = 8$

$J=\frac{I}{3}+2\times(\text{مساحة } ACD)$

$$J=\frac{8}{3}+2\times\frac{2\times\sqrt{12}}{2}=\frac{8}{3}+2\sqrt{12}=\frac{8+6\sqrt{12}}{3}$$

تطبيق 7 حساب التكامل باستعمال الخطية

1) إذا علمت أن $\int_0^3 f(x)\,dx=3$ و $\int_0^3 g(x)\,dx=-3$ احسب مايلي:
$$I=\int_0^3 4f(x)\,dx \quad ، \quad J=\int_0^3 \frac{1}{5}g(x)\,dx \quad ، \quad k=\int_0^3 (2f(x)-3g(x))\,dx$$

2) من اجل كل x من المجال $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ قارن بين $\sin x$ و $\cos x$
ثم بين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$

✓ الحل

1) $I = 4\int_0^3 f(x)\,dx = 4(3) = 12$ و $J = \frac{1}{5}\int_0^3 g(x)\,dx = \frac{1}{5}(-3) = \frac{-3}{5}$

$K = 2\int_0^3 f(x)\,dx - 3\int_0^3 g(x)\,dx = 2I - 3J = 15$

2) من اجل كل x من $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ لدينا $\cos x > \sin x$ و بالتالي $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$

تطبيق 8 المقارنة بين تكاملين

قارن بين العددين الحقيقيين I و J و ذلك بدون حساب قيمتيهما في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $I = \int_0^1 xe^x\,dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$ ب) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,dx$ و $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 xLnx$

ج) $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt$ و $J = \int_0^1 \frac{t}{2+t}\,dt$

✓ الحل

أ) من اجل كل x من $[0,1]$ يكون $x^2 \le x$ بالضرب في e^x نجد $x^2 e^x \le xe^x$ و منه $\int_0^1 x^2 e^x\,dx \le \int_0^1 xe^x\,dx$ إذن $J \le I$

ب) من اجل كل x من $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ يكون $Lnx < x$ بالضرب في x نجد $xLnx < x^2$

و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 xLnx < \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,dx$ إذن $J < I$

ج) من اجل كل t من $[0,1]$ يكون $1+t < 2+t$ و بالقلب نجد $\frac{1}{2+t} < \frac{1}{1+t}$

وبالضرب في t نجد $\frac{t}{2+t} < \frac{t}{1+t}$ بالمرور إلى التكامل نجد $\int_0^1 \frac{t}{2+t}\,dt < \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt$

إذن $J < I$.

تطبيق 9 إثبات متباينات

برهن المتباينات التالية :

أ) $1 \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,dt \le 2$ ب) $\frac{9}{2} \le \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx \le 9$

ج) $\frac{1}{3} \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}\,dt \le \frac{1}{2}$ د) $2Ln2 \le \int_1^3 Ln(x^2+1)\,dx \le 2Ln10$

✓ الحل

أ) من اجل كل t من $[0,4]$ يكون $0 \le \sqrt{t} \le 2$ بإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد :

$2 \le 2+\sqrt{t} \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2+\sqrt{t}} \le \frac{1}{2}$ بالمرور إلى التكامل نجد :

$\int_0^4 \frac{1}{4}\,dt \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,dt \le \int_0^4 \frac{1}{2}\,dt$ اي $1 \le \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,dt \le 2$

ب) بما أن $0 \le x \le 3$ فإن $1 \le \sqrt{1+x} \le 2$ بالضرب في x نجد :

$x \le x\sqrt{1+x} \le 2x$ بالمرور إلى التكامل نجد

$\int_0^3 x\,dx \le \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx \le \int_0^3 2x\,dx$ اي $\frac{9}{2} \le \int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx \le 9$

ج) من اجل كل t من $[0,1]$ لدينا $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+t^2} \le \frac{1}{2}$ و بالمرور إلى التكامل نجد :

$\int_0^1 \frac{1}{3}\,dt \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}\,dt \le \int_0^1 \frac{1}{2}\,dt$ منه نجد $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}\,dt \le \frac{1}{2}$

د) من اجل كل x من $[1,3]$ لدينا $2 \le x^2+1 \le 10$ ومنه ينتج:

$Ln2 \le Ln(x^2+1) \le Ln10$

بالمرور إلى التكامل نجد $2Ln2 \le \int_1^3 Ln(x^2+1)\,dx \le 2Ln10$.

تطبيق 10 حصر تكامل دالة

نريد حصر التكامل $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx$.

1) بدراسة تغيرات الدالتين h و K على المجال $[0,1]$ بحيث ،

$h(x)=e^{-x}+x-1$ و $K(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$ بين انه من اجل كل x من $[0\ ,\ 1]$ يكون $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$... (1)

2) استنتج حصرا لـ e^{-x^2} لما x ينتمي إلى $[0\ ,\ 1]$ ثم بين انه من اجل كل x من $[0\ ,\ 1]$ يكون $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$ (2)

3) أ) استنتج انه من اجل كل x من $[0\ ,\ 1]$ ؛

$$\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$$

ب) استنتج من المتباينة (2) أن $\frac{1}{2}\le I\le \frac{5}{24}+\frac{Ln2}{2}$

✓ الحل

1) h قابلة للاشتقاق على $[0\ ,\ 1]$ ولدينا $h'(x)=-e^{-x}+1$

الدالة K قابلة للاشتقاق على $[0\ ,\ 1]$ ولدينا $K'(x)=h(x)$

وبما أن $h(x)\ge 0$ فإن $K'(x)\ge 0$

ومنه فإن الدالة K متزايدة تماما على $[0\ ,\ 1]$.

x	0		1
$h'(x)$	0	+	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$

x	0		1
$K'(x)$	0	+	
$K(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

$h(x)\rangle 0$ يكافئ $e^{-x}\ge 1-x$... (*)

$K(x)\rangle 0$ يكافئ $e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$... (**)

من (*) و (**) نجد $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$... (1)

2) بما أن x ينتمي إلى $[0\ ,\ 1]$ فإن $x^2\in[0\ ,\ 1]$ وباستبدال x بـ x^2 في المتباينة (1) نجد $1-x^2\le e^{-x^2}\le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ بالقسمة على $1+x$ نجد ؛

$$1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)} \quad \text{... (2)}$$

3) بعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ x^4 على $1+x$ نجد $\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$

ب) المتباينة (2) تصبح $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x)}$

بالتبسيط نجد $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x$ و بالمرور إلى

التكامل نجد : $\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2}\right]dx\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\int_0^1(1-x)dx$

منه نستنتج :

$$\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}Ln(x+1)+\frac{1}{2}x\right]_0^1\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2}\le I\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2) \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}Ln(2)$$

تطبيق 11 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

(I_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

1) أ) احسب I_1 ثم I_0+I_1 و استنتج I_0

ب) من أجل كل عدد طبيعي n احسب I_n+I_{n+1}

2) برهن انه من اجل كل x من $[0\ ,\ 1]$

$$\frac{e^{nx}}{2}\le\frac{e^{nx}}{1+e^x}\le\frac{e^{nx}}{1+e}$$

ثم أعط حصرا لـ I_n .

3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين (I_n) و $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$

✓ الحل

1) من اجل $n=1$ لدينا $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$

بوضع $u(x)=e^x+1$ نجد $u'(x)=e^x$ منه :

$$I_1=\int_0^1\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[Ln(u(x))\right]_0^1=\left[Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

بما أن $I_0+I_1=1$ و $I_1=Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ فإن $I_0=1-Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=Ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

ب) $I_n+I_{n+1}=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx+\int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx$

$=\int_0^1 \frac{e^{nx}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx=\int_0^1 e^{nx}dx=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n}e^n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(e^n-1\right)$

2) من أجل كل x من $[0,1]$ لدينا $1\le e^x\le e$ ومنه $2\le e^x+1\le e+1$

بالقلب نجد $\frac{1}{2}\ge\frac{1}{e^x+1}\ge\frac{1}{e+1}$ بالضرب في e^{nx} نجد:

$\frac{e^{nx}}{2}\le\frac{e^{nx}}{e^x+1}\le\frac{e^{nx}}{e+1}$... (1)

بمكاملة حدود المتباينة (1) نجد $\left[\frac{1}{2n}e^{nx}\right]_0^1\le I_n\le\left[\frac{1}{n(1+e)}e^{nx}\right]_0^1$ بالحساب

نجد: $\frac{1}{2n}\left[e^n-1\right]\le I_n\le\frac{1}{n(1+e)}\left(e^n-1\right)$... (2)

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n\left(1-e^{-n}\right)}{n(e+1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)\frac{\left(1-e^{-n}\right)}{(e+1)}=+\infty$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{e+1}=\frac{1}{e+1}$)

و حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}I_n=+\infty$

- بقسمة طرفي المتباينة (2) على e^n نجد $\frac{1}{n(e+1)}\times\frac{e^n-1}{e^n}\le\frac{I_n}{e^n}\le\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n-1}{e^n}=1$ و $\lim\frac{1}{n(e+1)}=0$ فإن $\lim\frac{1}{2n}=0$

و حسب نظرية الحصر فإن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{I_n}{e^n}\right)=0$ و $\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{2n}=\lim\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{1}{n(e+1)}=0$

تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx$

1) بين أن $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ ، ب) استنتج نهاية المتتالية (I_n).

✓ الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ يكون $2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $0\le\cos 2x\le 1$

ومنه $0\le x^n\cos 2x\le x^n$ بالمرور إلى التكامل نجد: $0\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx$

لكن $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ و $0<\frac{1}{n+1}\le 1$

ومنه $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\,dx\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ إذن $0\le I_n\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

ب) بما أن $0<\frac{\pi}{4}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}=0$ و بالتالي حسب نظرية الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

تطبيق 13 تعيين دالة أصلية لدالة

1) بين أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3\left[\cos(3x+2)+x\right]$ تقبل دالة أصلية F معرفة بـ $F(x)=\sin(3x+2)+3\frac{x^2}{2}+10$

ب) أوجد دالتين أصليتين أخريتين للدالة f.

2) 1) بين أن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ تقبل دالة أصلية G بحيث $G(x)=Ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$

ب) H دالة معرفة بـ $H(x)=Ln(7x+7)+\frac{x+2}{x+1}$

هل H دالة أصلية لـ g؟

✓ الحل

1) 1) F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل x من $\mathbb{R}$; $F'(x)=f(x)$

الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $F'(x)=3\cos(3x+2)+3x=f(x)$

منه F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) جميع الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي من الشكل $F+k$ حيث k ثابت حقيقي

و عليه فإن الدالتين $x \mapsto F(x)+1$ و $x \mapsto F(x)+2$ اصليتان لـ f .

2) 1) G دالة أصلية لـ g على المجال $]0,+\infty[$ إذا وفقط إذا كانت $G'(x)=g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $G'(x)=g(x)$

منه G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0,+\infty[$

ب) الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا $H'(x)=g(x)$

منه H دالة أصلية للدالة g على المجال $]0,+\infty[$

تطبيق 14 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

1) عين دالة اصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3x^5+x^4+x$ ، ب) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2}$

جـ) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ ، د) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

2) عين الدالة الأصلية G للدالة g في كل حالة من الحالات التالية ،

أ) $g(x)=\dfrac{2x-1}{(x^2-x)^3}$ على $]1,+\infty[$ ، ب) $g(x)=3(2x-3)^6$ على $\mathbb{R}$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ على $\mathbb{R}$ ، د) $g(x)=\dfrac{5}{(-3x+1)^3}$ على $\left]-\infty,\dfrac{1}{3}\right[$

هـ) $g(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ على المجال $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

✓ الحل

1) لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

أ) $F(x)=\dfrac{1}{2}x^6+\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^2$

ب) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ و بالتالي $F(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على $\mathbb{R}^*$ هي $x \mapsto Ln|x|$ و الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

على $\mathbb{R}^*$ هي الدالة $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ و منه $F(x)=x+Ln|x|-\dfrac{1}{x}$

د) $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x)=x^2-1$ وبالتالي $F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2-1}$

2) 1) $g(x)=(2x-1)(x^2-x)^{-3}$

$g(x)=u'(x)\times(u(x))^{-3}$ حيث $u(x)=x^2-x$ ومنه فإن الدالة G معرفة بـ:

$$G(x)=\frac{u(x)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{(x^2-x)^2}$$

ب) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=\dfrac{3}{2}\times u'(x)(u(x))^3$ حيث : $u(x)=2x-3$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^3$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{4}(u(x))^4$ اي $x \mapsto \dfrac{1}{4}(2x-3)^4$

و منه فإن الدالة الأصلية للدالة g هي G حيث $G(x)=\dfrac{3}{8}(2x-3)^4$

جـ) $g(x)=\sin x\cos x$ و منه $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$

الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة G حيث $G(x)=-\dfrac{1}{4}\cos(2x)$

د) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=5(-3x+1)^{-3}$

بوضع $u(x)=-3x+1$ نجد $u'(x)=-3$ و منه $g(x)=\dfrac{-5}{3}u'(x)(u(x))^{-3}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^{-3}$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{-1}{2}(u(x))^{-2}$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ: $G(x)=\dfrac{5}{6(-3x+1)^2}$

هـ) بوضع $u(x)=2x-1$ نجد $u'(x)=2$ منه $g(x)$ تكتب على الشكل $g(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x \mapsto Ln(2x-1)$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x)=\dfrac{3}{2}Ln(2x-1)$

تطبيق 15 تعيين دالة أصلية تحقق شرط معطى

أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على مجال I يطلب تعيينه.

أ) $f(x)=x^2-3x-1$ و $F(0)=0$ ، ب) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+x$ و $F(1)=0$

جـ) $f(x)=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ و $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ ، د) $f(x)=\dfrac{-1}{2-x}$ و $F(1)=1$

✓ الحل

أ) الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية هي $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+k$

$F(0)=0$ يكافئ $k=0$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي $x\mapsto\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x$

ب) الدالة f معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$ و دوالها الأصلية على هذا المجال هي :

$F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+k$ ،

$F(1)=0$ يكافئ $k=\frac{1}{2}$ و منه الدالة الأصلية هي $x\mapsto\frac{-1}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$.

جـ) الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و دوالها الأصلية من الشكل :

$F(x)=\frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ يكافئ $k=\frac{\sqrt{2}}{8}$

ومنه الدالة الأصلية هي $x\mapsto\frac{-1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}$

د) الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]-\infty,2[$ و دوالها الأصلية هي :

$F(x)=Ln(2-x)+k$

$F(1)=1$ يكافئ $k=1$ ومنه الدالة الأصلية التي تحقق الشرط هي $x\mapsto Ln(2-x)+1$

تطبيق 16 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية

أ) $f(x)=3e^{-2x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}$ ، $I=]-2,+\infty[$

جـ) $f(x)=\frac{1}{xLnx}$ ، $I=]1,+\infty[$

د) $f(x)=1+\frac{1}{\tan^2 x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

هـ) $f(x)=\tan^2 x$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

و) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{x+1}{x-2}}$ ، $I=]2,+\infty[$

ي) $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ ، $I=]0,+\infty[$

✓ الحل

أ) نضع $u(x)=-2x+1$ منه $u'(x)=-2$ عندئذ $f(x)=\frac{-3}{2}u'(x)e^{u(x)}$

و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\frac{-3}{2}e^{u(x)}=\frac{-3}{2}e^{-2x+1}$

ب) نضع $u(x)=x$ و $v(x)=\sqrt{x+2}$ عندئذ $u'(x)=1$ و $V'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

بالتالي $f(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=(u\times v)(x)$ اي $F(x)=x\sqrt{x+2}$

جـ) يمكن كتابة $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{Lnx}$ وبوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f على $]1,+\infty[$ هي $F(x)=Ln(u(x))$ اي $F(x)=Ln(Lnx)$

د) من أجل كل x من I لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

و منه $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}=(\tan x)'\times\tan^{-2}x=u'(x)u^{-2}(x)$ حيث $u(x)=\tan x$

و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=-\frac{1}{u(x)}$

اي $F(x)=\frac{-1}{\tan x}$

هـ) لدينا $f(x)=\tan^2 x$ و لدينا $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

ومنه $\tan^2 x=(\tan x)'-1$ و بالتالي $f(x)=(\tan x)'-1$

إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\tan(x)-x$

و) بوضع $u(x)=\frac{x+1}{x-2}$ نجد $u'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ و منه $f(x)=\frac{1}{-3}(u'(x))e^{u(x)}$

و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x)=\frac{-1}{3}e^{u(x)}$

اي $F(x)=-\frac{1}{3}e^{\frac{x+1}{x-2}}$

ي) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x}\times Lnx$ و بوضع $u(x)=Lnx$ نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$

و بالتالي $f(x)=u'(x)u(x)$ و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث :

$f(x)=\frac{1}{2}(Lnx)^2$

تطبيق 17 تعيين دالة أصلية لدالة ناطقة

1) f دالة معرفة على $I=]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+4}{(x+1)^2}$

ا) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ f على I.

2) g دالة معرفة على $J=]2,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$

ا) اكتب $g(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على J.

3) h دالة معرفة على $H=]1,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2-1}$

ا) اكتب $h(x)$ على الشكل $h(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$

ب) استنتج دالة أصلية لـ h على H.

✓ الحل

1) ا) بتوحيد المقامات نجد $f(x)=\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$ و بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد :

$a=1$ و $b=3$ و عليه $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ هي $x\mapsto Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{(x+1)^2}$ هي $x\mapsto\frac{-3}{x+1}$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ f هي $F(x)=Ln(x+1)+\frac{-3}{x+1}$

2) ا) بنفس الكيفية السابقة نجد أن $g(x)=2x+1+\frac{3}{x-2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto 2x+1$ هي الدالة $x\mapsto x^2+x$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{x-2}$ هي الدالة $x\mapsto 3\,Ln(x-2)$

و بالتالي الدالة الأصلية لـ g هي $F(x)=x^2+x+3\,Ln(x-2)$

3) ا) بنفس الكيفية السابقة نجد $h(x)=x+1+\frac{3}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x-1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{3}{2}\times\frac{1}{x+1}$ هي الدالة $x\mapsto\frac{3}{2}Ln(x+1)$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x+1$ هي الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}+x$

و بالتالي الدالة الأصلية للدالة h هي F حيث $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}Ln(x-1)-\frac{3}{2}Ln(x+1)$.

تطبيق 18 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^3 x$

1) باستعمال العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ بين أن $f(x)=\cos x-\cos x\,\sin^2 x$

2) استنتج دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

✓ الحل

1) من العلاقة $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ نجد $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

منه $f(x)=\cos x\cos^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$

الدالة $x\mapsto\cos x\sin^2 x$ من الشكل $x\mapsto u'(x)\,u^2(x)$ حيث $u(x)=\sin x$

و بالتالي فإن دالتها الأصلية هي $x\mapsto\frac{\sin^3 x}{3}$

إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

تطبيق 19 تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin^2 x\,\cos^3 x$

1) بين أن $f(x)=\cos x\,\sin^2 x-\cos x\,\sin^4 x$

2) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

✓ الحل

1) لدينا $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ منه $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

إذن $f(x)=\sin^2 x\,\cos x\,\cos^2 x$

$=\sin^2 x\,\cos x(1-\sin^2 x)=\cos x\,\sin^2 x-\cos x\,\sin^4 x$

2) الدالة $x \mapsto \cos x \sin^4 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^4$

و بالتالي دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{5}(u(x))^5$ أي $x \mapsto \frac{1}{5}\sin^5 x$

الدالة $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^2$

و منه فإن دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}(u(x))^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$

إذن الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$.

و بصفة عامة إذا كانت $f(x) = a\cos^n x \sin^p x$ مع p و n طبيعيين غير معدومين فإن:

- إذا كان أحدهما فردي و الآخر زوجي نستعمل المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ التي تسمح لنا بكتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \sin x \times q(\cos x)$ حيث q دالة كثيرة حدود و بهذه الكتابة نستطيع تعيين دالة أصلية لـ f.
- إذا كان p و n كليهما زوجي نستعمل الكتابة الخطية مما يسمح لنا بكتابة $f(x)$ على شكل مجاميع من الشكل $\lambda \cos(\alpha x)$ أو $\mu \sin(\beta x)$ و التي دالتها الأصلية معروفة.

تطبيق 20 تعيين دالة أصلية لدالة أسية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 e^{3x}$

أوجد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(x) = p(x)e^{3x}$ مع p دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

✓ الحل

$p(x)$ من الدرجة الثالثة هذا يعني أن $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

بما أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $F'(x) = p'(x)e^{3x} + 3e^{3x}p(x) = e^{3x}(p'(x) + 3p(x))$

$= \left[3ax^3 + (3a+3b)x^2 + (2b+3c)x + c + 3d\right]e^{3x}$

و لدينا من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = \frac{-1}{3}$ ، $c = \frac{2}{9}$ و $d = \frac{-2}{27}$

ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{3x}$

تطبيق 21 حساب القيمة المتوسطة لدالة

احسب القيمة المتوسطة M للدالة f حيث $y = f(x) = \cos^2(\alpha x)$

على المجال $\left[0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$

✓ الحل

$$M = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^2(\alpha t)\,dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1+\cos(2\alpha t)}{2}\right)dt = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha t)\right]dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha t)\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

تطبيق 22 تعيين اتجاه تغير دالة اصلية

F دالة معرفة بـ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

1) احسب $F(0)$ ثم $F'(x)$ ، ب) ادرس اتجاه تغيرات الدالة F.

✓ الحل

1) $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 0$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) بما انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\frac{1}{1+x^2} > 0$ فإن $F'(x) > 0$

و منه فإن F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

تطبيق 23 حساب التكاملات باستعمال الدالة الأصلية

احسب التكاملات التالية :

1) $I=\int_0^2 (x-2)dx$ ، ب) $I=\int_0^1 (t^2-3t+1)dt$

ج) $I=\int_{Ln2}^{Ln3} e^{2x}\,dt$ ، د) $I=\int_0^1 (2t+1)(t^2+t)^3\,dt$

هـ) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}$ ، و) $I=\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dt$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}}dx$ ، ي) $I=\int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x}$

✓ الحل

1) $I=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2=[2-4]-(0)=-2$

ب) $I=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1=-\frac{1}{6}$

ج) $I=\left[\frac{(t^2+t)^4}{4}\right]_0^1=4$

د) $I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{Ln2}^{Ln3}=\frac{1}{2}e^{Ln9}-\frac{1}{2}e^{Ln4}=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

هـ) $I=\int_0^1 \frac{3}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1 u'(x)u^{-2}(x)dx$

$=\left[\frac{-3}{2u(x)}\right]_0^1=\left[\frac{-3}{2(x^2+1)}\right]_0^1=\frac{3}{4}$

و) $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}}=\int_0^3 \frac{(2+t)'}{\sqrt{2+t}}dt=\left[2\sqrt{2+t}\right]_0^3=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

ن) $I=\int_0^4 \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{3x+4}}dx=\frac{1}{3}\int_0^4 \frac{(3x+4)'}{\sqrt{3x+4}}dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right]_0^4=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

ي) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-5}{x}dx=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{5}{x}\right)dx=[x-5Ln(-x)]_{-2}^{-1}=1+5Ln2$

تطبيق 24 تعيين دالة أصلية باستعمال علاقة شال و مساحة قرص

f معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{4-(x-1)^2}\,,\ x\in[-1\ ,\ 1] \\ f(x)=\frac{2}{x}\,,\ x\geq 1 \end{cases}$

1) بين ان منحنى الدالة f على المجال $]-1\ ,\ 1[$ هو ربع دائرة ثم مثل بيان f

2) استعمل علاقة شال لحساب التكاملين $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$ ،

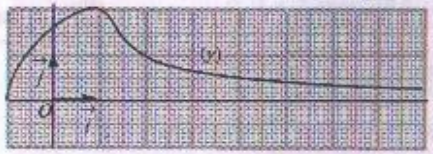
$J=\int_4^{-1} f(x)dx$

✓ الحل

1) من اجل كل x من $]-1\ ,\ 1[$ نضع $y=\sqrt{4-(x-1)^2}$ بتربيع الطرفين نجد $y^2=\left(4-(x-1)^2\right)$ ومنه نستنتج $(x-1)^2+y^2=4$ إذن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega(1,0)$ و طول نصف قطرها $R=2$.

و بما ان $x\in[-1,1]$ و $y\geq 0$

فان (γ) هو ربع دائرة



2) $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_1^3 f\,(x)dx$

$I=\frac{1}{4}S+2\left[Lnx\right]_1^3=\frac{1}{4}\pi\times 4+2\,Ln2=\pi+2\,Ln2$ حيث (S مساحة الدائرة)

$J=\int_4^{-1} f\,(x)dx=\int_4^1 f(x)\,dx+\int_1^{-1} f(x)\,dx$

$=\left[2\,Ln(x)\right]_4^1-\int_{-1}^{1} f(x)dx=-2\,Ln4-\pi$

تطبيق 25 حساب التكاملات

1) احسب $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

2) احسب I_2+I_1 إذا علمت أن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ ثم استنتج قيمة I_2 .

✓ الحل

1) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\left[Ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}Ln2$

2) $I_1+I_2=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx+\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

إذن $\begin{cases}I_1+I_2=\frac{1}{2}\\ I_1=\frac{1}{2}Ln2\end{cases}$ منه نجد $I_2=\frac{1}{2}-I_1$ اي $I_2=\frac{1}{2}(1-Ln2)$

تطبيق 26 حصر تكامل دالة

1) مثل الدالة f المعرفة على $[0\ ,\ 1]$ بـ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (الوحدة 8cm)
(جزئ المجال $[0\ ,\ 1]$ إلى 8 مجالات متساوية الطول).
2) باستعمال طريقة المستطيلات احصر مساحة الحيز من المستوي تحت منحني الدالة f ثم احسب سعة هذا الحصر و التي تمثل حاد من الأعلى للفرق بين مساحة المستطيلات الكبرى و مساحة المستطيلات الصغرى
استنتج حصرا لـ $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

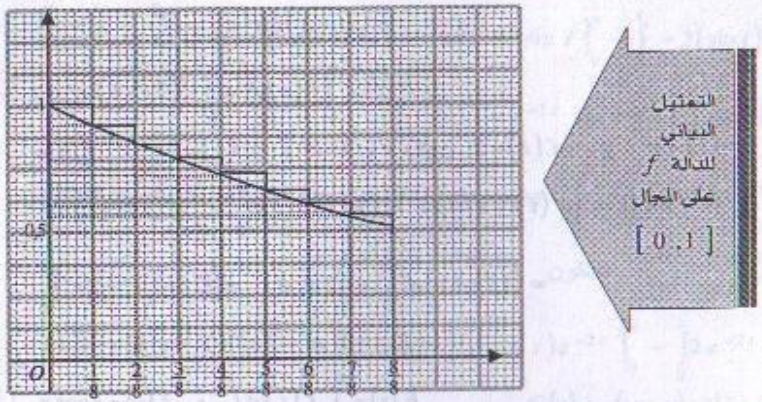
✓ الحل

2) $\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right)\geq \mathcal{A}\geq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)$

ومنه $213\ ,28\times10^{-15}\geq \mathcal{A}\geq 314\times10^{-15}$

سعة الحصر هي $M=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k}{8}\right)-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(\frac{k-1}{8}\right)\approx 1{,}0072\times10^{-13}$

إذن $213\ ,28\times10^{-15}\geq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt\geq 314\times10^{-15}$



تطبيق 27 تعيين دالة أصلية باستعمال التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية على المجال المعطى و التي تنعدم عند a

1) $f(x)=(2x+1)Lnx$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$
2) $f(x)=(2x+1)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$
3) $f(x)=x\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=\frac{\pi}{2}$
4) $f(x)=(Lnx)^2$ ، $I=]0\ ,\ +\infty[$ ، $a=1$
5) $f(x)=e^{-2x}\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

✓ الحل

1) بوضع $u'(x)=2x+1$ و $v(x)=Lnx$ يكون $u(x)=x^2+x$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

$F(x)=\int_1^x u'(t)v(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x u(t)v'(t)dt$

$=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x \frac{t^2+t}{t}\,dt=\left[\left(t^2+t\right)Lnt\right]_1^x-\int_1^x (t+1)\,dt$

$=\left[\left(t^2+t\right)Lnt-\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x=\left[\left(x^2+x\right)Lnx-\frac{x^2}{2}-x\right]-\left[-\frac{1}{2}-1\right]$

$$=\left(x^2+x\right)Ln(x)-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$$

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (2t+1)\,e^t\,dt$

بوضع $u(t)=2t+1$ و $v'(t)=e^t$ يكون $u'(t)=2$ و $v(t)=e^t$

$$F(x)=\int_0^x u(t)\,v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$=\left[(2t+1)e^t\right]_0^x-\int_0^x 2e^t\,dt=\left[(2t+1)e^t-2e^t\right]_0^x$$

$$=(2x+1)\,e^x-2e^x+1=e^x(2x-1)+1$$

(3) $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$ و $f(x)=x\cos x$

بوضع $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\sin t\end{cases}$

$$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x u(t)v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x u'(t)v(t)dt$$

$$=\left[t\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t\,dt=x\sin x-\frac{\pi}{2}+\left[\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$=x\sin x-\frac{\pi}{2}+\cos x$$

(4) بوضع $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\frac{2}{x}Ln\,x\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=(Ln\,x)^2\end{cases}$

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x u'(t)v(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x\left[u(t)v'(t)\right]dt$$

$$=\left[t(Lnt)^2\right]_1^x-\int_1^x 2\,Lnt\,dt=\left[t(Lnt)^2\right]_1^x-\left[2(t\,Ln(t)-t)\right]_1^x$$

$$=\left[t(Lnt)^2-2t\,Ln(t)+2t\right]_1^x=x(Ln\,x)^2-2x\,Ln\,x+2x-2$$

(5) $F(x)=\int_0^x e^{-2t}\cos t\,dt$

بوضع $\begin{cases}u(t)=e^{-2t}\\ v'(t)=\cos t\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u'(t)=-2e^{-2t}\\ v(t)=\sin t\end{cases}$

$$F(x)=\int_0^x u(t)v'(t)dt=\left[e^{-2t}\sin t\right]_0^x-\int_0^x -2(\sin t)e^{-2t}\,dt$$

$$=e^{-2x}\sin x+2\int_0^x(\sin t)\left(e^{-2t}\right)dt$$

نضع $G(x)=\int_0^x(\sin t)e^{-2t}\,dt$ ونستعمل التكامل بالتجزئة مرة أخرى لتعيين الدالة G

بوضع $\begin{cases}u'(t)=\sin t\\ v(t)=e^{-2t}\end{cases}$ فيكون $\begin{cases}u(t)=-\cos t\\ v'(t)=-2e^{-2t}\end{cases}$

$$G(x)=\left[(-\cos t)e^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x 2e^{-2t}\cos t\,dt$$

$$G(x)=-(\cos x)e^{-2x}+1-2F(x)$$

إذن $F(x)=e^{-2x}\sin(x)-2(\cos x)e^{-2x}+2-4F(x)$

$$5F(x)=e^{-2x}\sin x-2(\cos x)e^{-2x}+2$$

$$5F(x)=e^{-2x}\left[\sin x-2\cos x\right]+2$$

$$F(x)=\frac{1}{5}e^{-2x}\left[\sin x-2\cos x\right]+\frac{2}{5}$$

تطبيق 28 حساب التكامل باستعمال التجزئة

نعتبر التكامل التالي $I_{(n,k)}=\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ حيث n و k عددان طبيعيان غير معدومين و $k\le n$

1) أوجد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ ثم استنتج $I_{(n,k)}$ بدلالة n و k

2) احسب $I_{(2,1)}$ و $I_{(5,2)}$

✓ الحل

1) لإيجاد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ نستعمل التكامل بالتجزئة

بوضع $u'(x)=k\,x^{k-1}$ يكون $u(x)=x^k$

$v'(x)=(1-x)^{n-k}$ يكون $v(x)=-\frac{1}{n-(k-1)}(1-x)^{n-(k-1)}$

و عليه $I_{(n,k)}=-\frac{1}{n-(k-1)}\left(\left[x^k(1-x)^{n-(k-1)}\right]_0^1-\int_0^1 k\,x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}dx\right)$

اي $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\,dx = \frac{k}{n-(k-1)} I(n,k-1)$

لدينا $I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} I(n,k-1) = \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} I(n,k-2)$

$= \frac{k}{n-(k-1)} \frac{k-1}{n-(k-2)} \frac{k-2}{n-(k-3)} I(n,k-3)$

$= \frac{k}{n-(k-1)} \frac{k-1}{n-(k-2)} \frac{k-2}{n-(k-3)} \cdots \frac{2}{n-1} \frac{1}{n} I(n,0)$

$= \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n,0)$

إذن $I(n,k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n,0)$

لكن $I_{(n,0)} = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

و بالتالي $I_{(n,k)} = \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{1}{n+1}$

2) $I_{(2,1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ و $I_{(5,2)} = \frac{1}{60}$

تطبيق 29 حساب مساحة حيز من المستوي

g دالة معرفة على $]1\,,+\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1) بين ان $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

ماهي المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة g .

2) احسب مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى g و المستقيمات التي معادلاتها $y = x+2$ و $x = 4$ و $x = m$ مع $m > 4$.

عين نهاية هذه المساحة لما $m \to +\infty$

✓ الحل

1) من اجل كل $x \neq 1$ لدينا

$x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

بما ان $\lim_{x \to 1} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة g .

بما ان $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) - (x+2) = 0$ فإن المنحني له مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x+2$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) من اجل كل $x > 4$ لدينا $g(x) - (x+2) > 0$ و منه المنحني (γ) للدالة g يقع فوق المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+2$

و عليه فالمساحة بين (γ) و (Δ) هي $S = \int_4^m [\,g(x) - (x+2)\,]\,dx$

$S = \int_4^m \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \left[3\,Ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_4^m$

$= \left(3\,Ln(m-1) - \frac{1}{m-1} - 3\,Ln\,3 + \frac{1}{3}\right)$

$\lim_{m \to +\infty} S = +\infty$

تطبيق 30 حساب مساحة حيز من المستوي

f دالة معرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x}(1 + Ln\,x)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\| = 3\,cm$

2) عين m فاصلة نقطة تقاطع (γ) مع محور الفواصل.

3) ليكن S_1 الحيز المحصور بين (γ) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = 1$ و ليكن S_2 الحيز المحصور بين (γ) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = a$ مع $a > 1$ عين a بحيث ان الحيزين S_1 و S_2 لهما نفس المساحة.

✓ الحل

1) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to 0} (1 + Ln\,x) = -\infty$

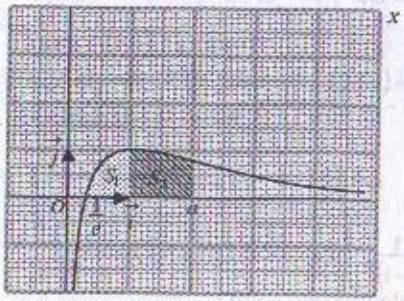
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times \infty$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{Lnx}{x}\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=\overset{+}{0}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{-Lnx}{x^2}$

$f'(x)=0$ يكافئ $Lnx=0$ يكافئ $x=1$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-Lnx$



x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$+$ 0 $-$	
تغيرات f	‖	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0	

2) فاصلة نقطة التقاطع (γ) مع $(x'x)$ هي حل للمعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ يكافئ $1+Lnx=0$ يكافئ $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

إذن $m=\frac{1}{e}$

3) $S_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(t)dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{t}+\frac{Lnt}{t}\right)dt=\left[Lnt+\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$=-Ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{2}\left(Ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (وحدة المساحة)

إذن $S_1=\frac{9}{2}cm^2$

$S_2=\left[Lnt+\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_1^a=Lna+\frac{1}{2}(Lna)^2$

$S_2=9\left[Lna+\frac{1}{2}(Lna)^2\right]cm^2$

$S_2=S_1$ يكافئ $9\left[Lna+\frac{1}{2}(Lna)^2\right]=\frac{9}{2}$ يكافئ $2Ln(a)+(Ln(a))^2=1$

بوضع $Ln(a)=\alpha$ نجد $\alpha^2+2\alpha-1=0$... (*)

$\Delta=4-4(1)(-1)=8$ و منه المعادلة (*) لها حلان $\alpha_1=-1+\sqrt{2}$ و $\alpha_2=-1-\sqrt{2}$

الحالة الاولى $\alpha=\alpha_1$

$Lna=\alpha_1$ يكافئ $a=e^{-1+\sqrt{2}}$ مقبول

الحالة الثانية $\alpha=\alpha_2$:

$Lna=\alpha_2$ يكافئ $a=e^{-1-\sqrt{2}}<1$ مرفوض إذن قيمة a المطلوبة هي $e^{-1+\sqrt{2}}$

تطبيق 31 حساب المساحة بين منحنيين و محور الفواصل

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x}$ و $g(x)=(x+1)e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالتين f و g ثم ارسم منحنيهما البيانيين (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس طول الوحدة 1 cm

2) نعتبر المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=m$ مع $m<0$ باستعمال التكامل بالتجزئة احسب بدلالة m المساحة $S(m)$ لحيز المستوي المحدود بين $(x'x)$ و المستقيم (Δ) و المنحنيين (C_f) و (C_g)

3) ماهي نهاية هذه المساحة لما m يؤول إلى $(+\infty)$

✓ الحل

1) دراسة تغيرات f :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-e^{-x}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f'(x)<0$

و بالتالي فإن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

دراسة تغيرات g :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+xe^{-x}\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1+x)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-xe^{-x}$

$g'(x)=0$ يكافئ $x=0$

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)>0$ و إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة g'	$+$	0	$-$
تغيرات g	$-\infty$ ↗	1	↘ 0

(C_g) يقطع $(x'x)$ في النقطة $A(-1,0)$

2) $S(m)=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+\int_{0}^{m} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{m} e^{-x}\,dx$$

$$\int_{0}^{m} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{m} = -e^{-m}+1$$

نحسب $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

بوضع $\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases}$ يكون $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)v'(x)\,dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}\,dx$$

$$= \left[e^{-x}(-x-2)\right]_{-1}^{0} = (-2)-(e)(-1) = -2+e$$

إذن $S(m) = -2+e-e^{-m}+1 = -e^{-m}+e-1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} S(m) = \lim\limits_{m\to+\infty} \left(-e^{-m}+e-1\right) = e-1$

تطبيق 32 حساب المساحات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-2)+e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم حدد الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2) λ عدد حقيقي موجب، نعتبر حيز المستوي المحدود بـ (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=0$ و $x=\lambda$
عبر عن S_1 مساحة هذا الحيز بدلالة λ.

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{1-x}$
A نقطة إحداثياتها $(\lambda\ ,\ 0)$ و B نقطة من (C_g) فاصلتها λ. المماس لـ (C_g) عند B يقطع محور الفواصل في نقطة C.
- احسب إحداثيات C ثم S_2 مساحة المثلث ABC.
- بين أن S_1+2S_2 مستقل عن λ.

✓ الحل

1) $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كانت
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$
فإن $y=x-2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)
لدينا $f(x)-(x-2)=e^{1-x}$
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{1-x}>0$ و منه فإن المنحني (C_f) يقع فوق (Δ)

2) بما أن المنحني (C_f) يقع فوق (Δ) فإن المساحة S_1 هي

$$S_1 = \int_{0}^{\lambda} [f(x)-(x-2)]\,dx = \int_{0}^{\lambda} e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_{0}^{\lambda} = -e^{1-\lambda}+e$$

3) $A(\lambda\ ,\ 0)$ ، $B(\lambda\ ,\ e^{1-\lambda})$
المماس لـ (C_g) عند B معادلته $y=-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}$
فاصلة نقطة تقاطع المماس مع $(x'x)$ هي حل للمعادلة $-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$
$-e^{1-\lambda}(x-\lambda)+e^{1-\lambda}=0$ يكافئ $\lambda e^{1-\lambda}+e^{1-\lambda}=xe^{1-\lambda}$ يكافئ $x=\lambda+1$
منه $C(\lambda+1\ ,\ 0)$
مساحة المثلث ABC هي $S_2=\frac{e^{1-\lambda}}{2}$
ومنه $S_1+2S_2=-e^{1-\lambda}+e+e^{1-\lambda}=e$ مستقل عن λ

تطبيق 33 حساب المساحات

(γ) جزء من قطع مكافئ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x^2$ مع $x\geq 0$.
n عدد طبيعي و U_n مساحة حيز المستوي المحدد بـ (γ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=n+1$ و $y=\frac{1}{2}n^2$. بين أن المتتالية (U_n) حسابية

✓ الحل

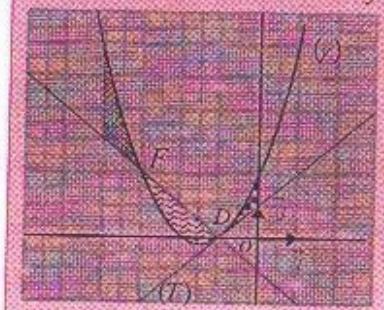
$$U_n = \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}n^2\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}n^2x\right]_{n}^{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{2}n^2(n+1)-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

بما أن $U_n=an+b$ فإنها حسابية أساسها
النصف و حدها الأول السدس

تطبيق 34 حساب المساحات

(γ) قطع مكافئ معادلته $y=x^2+3x+2$



1) اكتب معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة $D(-1,0)$

2) اعط معادلة المستقيم (DF) حيث $F(-3,2)$

3) احسب المساحة الملونة في الشكل.

الحل

1) دالة القطع المكافئ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $y'=f'(x)=2x+3$ و منه $f'(-1)=1$ إذن (T) ، $y=x+1$

2) (DF) ، $y=ax+b$
$D\in(DF)$ تكافئ $-a+b=0$... (1)
$F\in(DF)$ تكافئ $-3a+b=2$... (2)
من (1) و (2) نجد $a=-1$ و $b=-1$ منه (DF) ، $y=-x-1$

3) على المجال $[-4\ ,\ -3]$ المنحني يقع فوق (DF)
و على المجال $[-3\ ,\ -1]$ المنحني يقع تحت (DF)
و على المجال $[-1\ ,\ 0]$ المنحني يقع فوق (T) و عليه

$$S=\int_{-4}^{-3}\left(-y_{(DF)}+f(x)\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(y_{(DF)}-f(x)\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_{(T)}\right)dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}\left(x^2+4x+3\right)dx+\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right]_{-4}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{64}{3}-20+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{3}=\frac{64-60+1+9+1}{3}=\frac{15}{3}=5$$

إذن $S=5$ وحدة مربعة.

تطبيق 35 حساب مساحة القطع الناقص و الدائرة

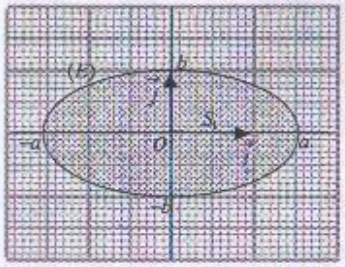
1) بين أن مساحة ربع قرص مركزه النقطة o و نصف قطره a مع $a>0$ موجود في الربع الأول من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس هي $\mathcal{A}_D=\frac{\pi}{4}a^2=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

2) ليكن (E) قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مع $a>0$ و $b>0$
احسب المساحة $\mathcal{A}_{(E)}$ للقطع الناقص

الحل

1) الدائرة التي مركزها o و نصف قطرها a معادلتها $x^2+y^2=a^2$
و منه $y=\sqrt{a^2-x^2}$ إذن مساحة ربع القرص تساوي ربع مساحة القرص أي $\frac{1}{4}\pi a^2$
و من جهة ثانية هذه المساحة تمثل مجموعة النقط M المعرفة بـ :
$a\geq x\geq 0$ و $\sqrt{a^2-x^2}\geq y\geq 0$ أي $\mathcal{A}_D=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

2) مساحة القطع الناقص تساوي $4S_1$
و هذا سبب التناظرات الموجودة في هذا الشكل



S_1 هي مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث
$a\geq x\geq 0$ و $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\geq y\geq 0$

$$\mathcal{A}_{(E)}=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_0^a 4\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\,\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

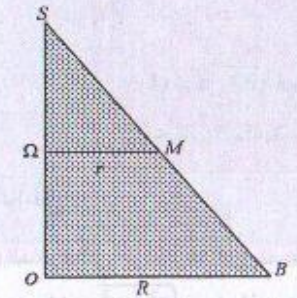
تطبيق 36 حساب حجم المخروط الدوراني

في معلم للفضاء نعتبر المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $S(0,0,4)$ و قاعدته دائرة مركزها النقطة O و نصف قطرها 2 من المستوي (xoy) نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $Z=a$ حيث $4\geq a\geq 0$
1) عين نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط و المستوي ذي المعادلة

$Z=a$ بدلالة a ثم عين مساحة قرص التقاطع.

2) استنتج حجم هذا المخروط بواسطة التكامل ثم احسبه بدلالة الدستور $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ حيث R نصف قطر دائرة القاعدة و h الارتفاع.

الحل

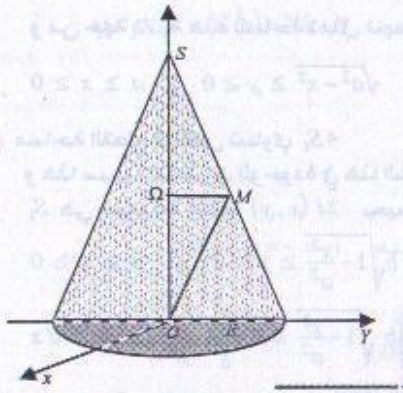


1) نصف قطر الدائرة هو ΩM

حسب نظرية طاليس لدينا $\frac{O\Omega}{OS}=\frac{\Omega M}{OB}$ و منه ،

$$r=\Omega M=\frac{OB\times O\Omega}{OS}=\frac{R\times a}{4}=\frac{aR}{4}$$

مساحة القرص هي πr^2 اي $\pi\frac{a^2R^2}{16}$



2)

$$V=\int_0^4 \frac{\pi a^2R^2}{16}\,da$$

$$=\frac{\pi R^2}{16}\int_0^4 a^2\,da=\frac{\pi R^2}{16}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^4$$

$$=\frac{\pi R^2\times 64}{16\times 3}=\frac{4}{3}\pi\pi^2$$

لدينا $V=\frac{\pi R^2}{3}h$ و $h=4$

و منه $V=\frac{4\pi R^2}{3}$

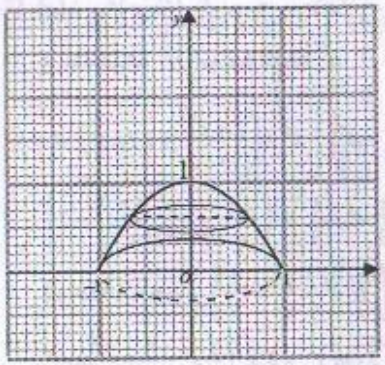
تطبيق 37 حساب حجم مجسم دوراني

في معلم متعامد و متجانس (p) قطع مكافئ معادلته $x=y^2$ ، ممثل في المجال $[-1\ ,\ 1]$.

بتدوير (p) حول محور الترتيب يولد مجسما دورانيا (Σ)

ماهي طبيعة مقطع من (Σ) بمستوي عمودي على $(o\,y)$ ثم عبر بدلالة a حيث $1\geq a\geq 0$ عن مساحته $S(a)$ ثم احسب حجم (Σ).

الحل



طبيعة مقطع من (Σ) هي دائرة

معادلة المستوي القاطع لـ (Σ)

هي $y=a$ مع $1\geq a\geq 0$

مساحة المقطع الناتج من تقاطع (Σ)

مع المستوي $y=a$

هي πr^2 مع $r^2=1-a$ اي $\pi(1-a)$

$$V=\int_0^1 \pi(1-a)\,da=\left[\pi\left(a-\frac{a^2}{2}\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

طريقة (2) ، $V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1(1-y)\,dy=\frac{\pi}{2}$

تطبيق 38 حساب حجم مجسم دوراني

f دالة معرفة على $]0\ ,+\infty[$ بـ $f(x)=x+\frac{Lnx}{x}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة I حيث $I=\int_1^e Lnx\,dx$

2) H دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $H(x)=\frac{1}{x}(Lnx)^2-\frac{2}{x}Lnx-\frac{2}{x}$

بين ان H دالة اصلية لـ h حيث $h(x)=\frac{(Lnx)^2}{x^2}$

3) نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس للفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المجسم S الذي نحصل عليه بتدوير حول $(o,\vec{i})$ حيز المستوي المحدد بالمنحنى (γ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=e$ و $(x'x)$ احسب حجم (S) و ليكن V.

الحل

1) $I=[x\,Lnx-x]_1^e=(e-e)-(-1)=1$

2) $H'(x)=\frac{1}{x^2}(Lnx)^2-\frac{2}{2x}Lnx+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}Lnx-\frac{2}{2x}=\frac{1}{x^2}(Lnx)^2=h(x)$

و منه الدالة H أصلية للدالة h

3) $V=\pi\int_1^e (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^e\left[x^2+\left(\frac{Lnx}{x}\right)^2+2Lnx\right]dx$

$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e+\pi\left[H(x)\right]_1^e+2\pi=\pi\left[\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{e}-\frac{2}{e}\frac{-2}{e}\right)+2\right]$

$=\pi\left[\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right]$ (وحدة الحجم)

$V=\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)(2cm)^3=8\pi\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{3}{e}+\frac{2}{3}\right)cm^3$

تطبيق 39 حساب حجم جسم دوراني

(γ) قوس لمنحنى ممثل على $[\alpha\ ,\ \beta]$ لدالة من الشكل $f(x)=\sqrt{p(x)}$ حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية موجب تماما على $[\alpha\ ,\beta]$.
ان تدوير (γ) حول (ox) يولد مجسما دورانيا نريد تعيين حجمه.
لتكن B_1 و B_2 مساحتي قاعدتي هذا المجسم و B_3 مساحة مقطع مجسم بالمستوي العمودي على $(x'x)$ و يبعد بنفس المسافة عن مستوي القاعدتين و ليكن $h=\beta-\alpha$

1) بين ان $V=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3)$

2) إرتفاع خزان ماء هو $48\,m$ نصفي قطري قاعدتيه هما R_1 و R_2
نعتبر ان حجمه هو حجم مجسم دوراني المولد بتدوير حول $(x'x)$ الحيز المحدد بالمنحنى (γ) الذي معادلته $y=12\sqrt{1+\frac{x^2}{24^2}}$ و المستقيمات التي معادلتها $x=-36$ و $x=12$ و $(x'x)$ احسب حجم هذا المجسم.

الحل :

1) $V=\pi\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta p(x)dx=\pi\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=\pi\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_\alpha^\beta$

$=\left[\frac{1}{3}a\beta^3+\frac{1}{2}b\beta^2+c\beta-\frac{1}{3}a\alpha^3-\frac{1}{2}b\alpha^2-c\alpha\right]\pi$

$=\left[\frac{1}{3}a(\beta^3-\alpha^3)+\frac{1}{2}b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\right]\pi$

$=(\beta-\alpha)\left[\frac{a}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+\frac{b}{2}(\alpha+\beta)+c\right]\pi$

$=\pi\left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]$

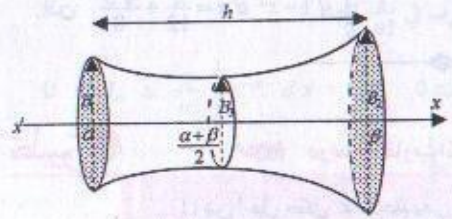
$=\frac{h}{6}\left[2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c\right]\pi$

و لدينا $B_1=\pi(a\alpha^2+b\alpha+c)$ و $B_2=(a\beta^2+b\beta+c)\pi$

$B_3=\left[a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+c\right]\pi$

$B_1+B_2+4B_3=2a(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3b(\alpha+\beta)+6c$

اذن $V=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4B_3)$



2) $\alpha=-36$ و $\beta=12$

و $\frac{\alpha+\beta}{2}=-12$

$B_1=\pi\times 468$ و $B_2=\pi(180)$

و $B_3=180\pi$ و $h=48$

اذن $V=\frac{48}{6}(4\times180\pi+180\pi+468\pi)=8\pi(4\times180+180+468)=10944\pi$

تطبيق 40 حساب التكامل بتبديل المتغير

نريد حساب التكامل $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) أثبت انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\sin^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$

2) باستعمال تبديل للمتغير احسب $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

الحل :

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x = 1-\sin^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$$

إذن $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2) بوضع $x=\cos t$ يكون $dx=-\sin t\,dt$

لما $x=0$ فإن $t=\frac{\pi}{2}$ و لما $x=\frac{1}{2}$ فإن $t=\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}-\sqrt{1-\cos^2(t)}\sin t\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t\sqrt{\sin^2(t)}\,dt$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t|\sin t|\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(t)\,dt=-\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

إذن $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

تطبيق 41 دراسة تقارب المتتاليات المعرفة بواسطة التكامل

1) من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ نضع $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\,dx$

أ) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد I_1

ب) بين انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $0\leq I_n\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

جـ) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}-I_n$

2) نعتبر المتتالية الحقيقية (a_n) المعرفة بـ $a_1=0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $a_n=\frac{1}{e}+(-1)^n I_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

الحل :

1) أ) $I_1=\int_0^1(1-x)\,e^{-x}\,dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=1-x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ منه نجد $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$$I_1=\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$=\left[-(1-x)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$=\left[(x-1)e^{-x}+e^{-x}\right]_0^1=\left[xe^{-x}\right]_0^1=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$ لدينا $0\leq 1-x\leq 1$ منه $0\leq(1-x)^n\leq 1$ و بضرب طرفي المتباينة في e^{-x} نجد $0\leq(1-x)^n e^{-x}\leq e^{-x}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$0\leq\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\,dx\leq\int_0^1 e^{-x}\,dx$$ بالضرب في $\frac{1}{n!}$ نجد

$$0\leq\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\,dx\leq\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx \quad \text{اي} \quad 0\leq I_n\leq\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+e^0=1-\frac{1}{e}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{e}\right)=0$ وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

جـ) $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\,dx$

بوضع $\begin{cases}u'(x)=(1-x)^n\\ v(x)=e^{-x}\end{cases}$ نجد $\begin{cases}u(x)=\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\\ v'(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx=\frac{1}{n!}\left([u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\right]_0^1\right)-\frac{1}{n!}\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)e^0-\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{+1}{n+1}(1-x)^{n+1}e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$$

إذن $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{(n+1)!}$

2) $a_1 = 0$ و $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

إثبات أن $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

نسمي p_n الخاصية " $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ "

من اجل $n=1$ لدينا $a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ منه p_1 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 1$ اي $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ و

نبرهن أن p_{n+1} صحيحة اي $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1}\left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

ب) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{e}$

تطبيق 42 دراسة تقارب متتالية

f دالة معرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) ادرس تغيرات f على $I =]0\,,+\infty[$

2) α عدد حقيقي موجب تماما، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_1^{\alpha} Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ ثم $\int_1^{\alpha} f(t)\,dt$.

3) k عدد طبيعي غير معدوم.

أ) برهن أن $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$

ب) برهن أن $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{k} - f(k)$ ثم استنتج $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$

4) أ) تحقق أن من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{0,1\}$ يكون $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$..(1)

ب) نضع من اجل كل $n \geq 1$ ،

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة (1) اعط عبارة مختصرة لـ S_n ثم بين ان المتتالية (S_n) متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

جـ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون:

$S_n \leq f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \leq 0$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n)]$

5) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$

أ) تحقق باستعمال السؤال 3 فرع ب ان:

$$f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = U_n - Ln(2) - Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

ب) استنتج ان المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} + Ln(x) - Ln(x+1)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(1 + x\,Ln(x)) - Ln(x+1) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

من اجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$

و منه f متناقصة تماما على I.

2) $I_\alpha = \int_1^\alpha Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

نجد $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$I_\alpha = \int_1^\alpha u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \left[x\,Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - Ln(x+1)\right]_1^\alpha$$

$$= \alpha\,Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - Ln(\alpha+1) + 2\,Ln(2)$$

$$\int_1^\alpha f(t)dt = \int_1^\alpha \frac{1}{t}dt + \int_1^\alpha Ln\left(\frac{t}{1+t}\right)dt = \int_1^\alpha \frac{1}{t}dt + I_\alpha$$

$$= Ln(\alpha) + I_\alpha = (\alpha+1)Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) + 2\,Ln(2)$$

3) من اجل كل x من $[k\ ,\ k+1]$ يكون $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{k+1} \quad \text{اي} \quad \frac{1}{k}(k+1-k) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{k+1}(k+1-k)$$

ب) لدينا $\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - Ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \left[Ln(x)\right]_k^{k+1} = Ln(k+1) - Ln(k) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

منه نستنتج $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$

-لدينا $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$

و عليه نجد $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$ بإضافة $-\frac{1}{k}$ إلى أطراف المتباينة الأخيرة نجد

$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \leq -f(k) \leq 0$ بالضرب في (-1)

نجد $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ اي $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ‖	$\searrow 0$

4) 1) من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{0\ ,\ 1\}$ لدينا $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

ب) $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$

منه (S_n) متتالية متقاربة نحو العدد 0.

حـ) لدينا $\frac{1}{n(n+1)} \geq f(n) \geq 0$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq f(n+1) \geq 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \geq f(2n) \geq 0$$

بجمع أطراف المتباينات طرفا لطرف نجد $S_n \geq f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \geq 0$

بما ان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ و حسب نظرية الحصر فان $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = 0$

5) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$

1) $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$

$$\vdots$$

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بجمع أطراف المتباينات طرفا لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n)\right)$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}dx = U_n - \left(f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n)\right)$$

منه نجد $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = U_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x}dx$

لكن $\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}dx = \left[Ln\,x\right]_n^{2n+1} = Ln(2n+1) - Ln(n) = Ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$$= Ln(2) + Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

إذن $f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)=U_n-Ln(2)-Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

ب) لدينا من السؤال 5) 1)

$$U_n=f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)+\left[Ln(2)+Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)+f(n+1)+\ldots+f(n+1)=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=Ln(2)$

و هذا يعني أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو $Ln(2)$.

تطبيق 43 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

نضع $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$.

1) احسب I_0 باستعمال التكامل بالتجزئة.

2) برهن أن المتتالية (I_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) نضع $S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k$ ، احسب S_n ثم عين نهاية المتتالية (S_n) .

الحل

1) $I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\cos\frac{x}{2}\end{cases}$

نجد $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=2\sin\frac{x}{2}\end{cases}$

$$I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\left[u(x)v(x)\right]_{\pi}^{4n\pi}-\int_{\pi}^{4n\pi} u'(x)v(x)dx\right)$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} 2\sin\frac{x}{2}dx$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}+\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{4n\pi}=4-\pi$$

2) $I_n=\frac{1}{2^n}I_0$ منه $I_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}I_0=\frac{1}{2^n}\times I_0\times\frac{1}{2}=I_n\times\frac{1}{2}$$

منه (I_n) متتالية هندسية اساسها $r=\frac{1}{2}$

3)

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k=I_0+I_1+\ldots+I_n=I_0\times\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=(4-\pi)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$=2(4-\pi)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

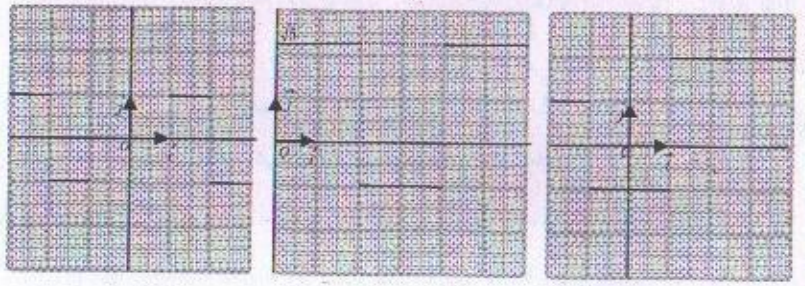
$$\lim_{n\to+\infty} S_n=2(4-\pi)$$

تمارين و مسائل

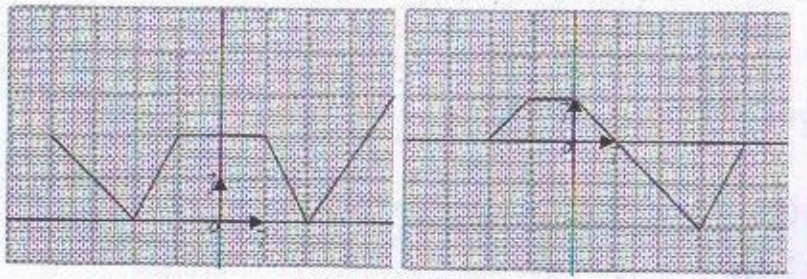
1 - مثل الدوال الدرجية f المعطاة ثم احسب التكامل $I(f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

ا) $\begin{cases} f(x)=5 & ,\ 1\geq x\geq -3 \\ f(x)=-4 & ,\ 3>x\geq 1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x)=-\sqrt{2} & ,\ \sqrt{5}\geq x\geq -\sqrt{5} \\ f(x)=-2 & ,\ 2\sqrt{5}>x\geq \sqrt{5} \end{cases}$

2 - كل شكل من الأشكال التالية يمثل التمثيل البياني لدالة درجية f ، عين عبارة $f(x)$ على كل مجال ثم احسب التكامل $I(f)$ على مجال تعريف الدالة f .



3 - في كل شكل من الأشكال التالية، الدالة التالفية بالقطع f ممثلة بالمنحنى المعطى احسب باستعمال المساحات التكامل $I(f)$ على مجال تعريف f .



4 - f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x+5$ و $g(x)=5-x$

ا) ارسم (C_f) و (C_g) على المجال $[-5,7]$ في معلم متعامد ومتجانس.

ب) باستعمال حساب المساحات، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^4 g(x)\,dx \ ,\ \int_0^7 g(x)\,dx \ ,\ \int_{-4}^0 f(x)\,dx \ ,\ \int_0^7 f(x)\,dx$$

5 - 1) نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{4-x^2}+1$ على المجال $[-2,2]$ بين أن التمثيل البياني للدالة f على المجال $[-2,2]$ في معلم متعامد ومتجانس هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) باستعمال الدستور الذي يعطي مساحة قرص، احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-2}^2 f(t)\,dt \ ,\ \int_0^2 f(t)\,dt \ ,\ \int_{-2}^0 f(t)\,dt$$

6 - لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $[0,5]$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x+2 & ,\ 1\geq x\geq 0 \\ f(x)=-x+2 & ,\ 2\geq x>1 \\ f(x)=x-4 & ,\ 5\geq x>2 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} g(x)=-x+3 & ,\ 1\geq x\geq 0 \\ g(x)=\frac{-1}{2}x+\frac{5}{2} & ,\ 5\geq x\geq 1 \end{cases}$$

1) احسب تكامل كل من f و g على المجال $[0,5]$

2) استنتج التكاملين على $[0,5]$ للدالتين $f+2g$ و $-2f+g$

7 - في معلم متعامد و متجانس ارسم على المجال $[0,1]$ التمثيل البياني لكل من الدالتين $x\to x^2$ ، $x\to\sqrt{x}$

- إذا علمت أن $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$ احسب $\int_0^1 x^2\,dx$ باستعمال التناظر المحوري.

8 - إذا علمت أن $\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$ احسب باستعمال التناظرات المعروفة للمنحنى ذي المعادلة $y=\sin x$ التكاملات التالية:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx \ ,\ J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx \ ,\ K=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx \ ,\ H=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin x\,dx$$

9 - من أجل كل قضية من القضايا التالية، بين إن كانت صحيحة أو خاطئة، وفي حالة هذه الأخيرة بين بمثال يبين ذلك.

لتعتبر الدالة f المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$

1) $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx$

2) إذا كان $f \geq 0$ على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي t يكون $\int_0^t f(x)\,dx \geq 0$

3) إذا كان $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجب فإن f موجبة على $[0,2]$

10 - نعتبر دالتين f و g مستمرتين على المجال $[2,4]$ و بحيث :

$-3 \leq f(x) \leq 4$ و $-1 \leq g(x) \leq 5$

1) اعط حصرا للدالة $f+g$ ثم $3f-g$ على هذا المجال.

2) اعط حصرا لكل من التكاملين التاليين :

$\int_2^4 (f(x)+g(x))\,dx$ ، $\int_2^4 (3f(x)-g(x))\,dx$

11 - بين المتباينات التالية :

1) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} Ln\,t\,dt \geq -\frac{2}{3}Ln\,3$ ب) $\frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2}$ ، ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^2)\,dt \leq 2$

12 - احسب حجم المجسم المولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلات $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y=\frac{1}{x}$ و $1 \leq x \leq e$.

13 - احسب حجم المجسم المولد بتدوير حول $(x'x)$ للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي المعادلة $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و $0 \leq x \leq 1$.

14 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^2 x\,dx$

بين $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ ما هي نهاية المتتالية (I_n) ؟

15 - من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ بين أن $\frac{x}{x+1} \leq Ln(x+1) \leq x$

يمكنك استعمال حصر الدالة f المعرفة بـ $f(t)=\frac{1}{1+t}$ على المجال $[0,x]$

16 - 1) باستعمال نظرية حصر القيمة المتوسطة للدالة $x \to \cos x$ على المجال $[x,y]$ بين أن $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

ب) بطريقة مماثلة بين أن $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$

17 - 1) باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة مرتين احسب $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x}\,dx$.

2) لتكن f دالة معرفة على $[0,3]$ بالعبارة $f(x)=x e^{-x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، طول الوحدة $4\,cm$. وليكن S المجسم المحصل عليه بالتدوير حول $(x'x)$ للمنحنى ذو المعادلة $y=f(x)$. عبر عن V بدلالة I ثم حدد قيمة مقربة لـ V حجم هذا المجسم إلى $1\,cm^3$

18 - نريد حصر التكامل $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{1+e^x}\,dx$

1) لتكن g دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $g(x)=Ln(1+e^x)$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، A نقطة من (γ) فاصلتها معدومة و B نقطة من (γ) فاصلتها 1

أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم عين معادلة المماس لـ (γ) في النقطة A

ب) p نقطة تقاطع المماس في A مع القطعة $[IB]$ حيث $I(1,0)$

احسب مساحة كل من الشكلين $OIPA$ و $OIBA$

2) نقبل أن المنحنى (γ) محصور بين القطعتين $[AP]$ و $[AB]$، بين أن

$$Ln\,2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq Ln\sqrt{2(1+e)}$$

3) باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن J بدلالة $\int_0^1 g(x)\,dx$ ثم استنتج حصرا لـ J

19 - عين الدالة الأصلية للدالة f على المجال المعطى باستعمال الدساتير الشهيرة :

1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=\frac{3}{2x-6}$ و $I=]3,+\infty[$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{x^3+1}$ و $I=]-1,+\infty[$ ، 4) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

5) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ و $I=]0,+\infty[$ ، 6) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{-3}{x}}$ و $I=]0,+\infty[$

7) $f(x)=-5e^{-4x+3}$ و $I=\mathbb{R}$ ، 8) $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$ و $I=\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos x-x\sin x$ و $I=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ و $I=]0,\dfrac{\pi}{2}[$

11) $f(x)=\dfrac{1-Ln\,x}{x^2}$ و $I=]0,+\infty[$

12) $f(x)=Tan\,x+x\,Lan^3\,x$ و $I=]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$

20 - u و v دالتان معرفتان على $I=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ بـ $u(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$

1) تحقق انه من أجل كل x من I يكون $u'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$

2) أوجد دالة اصلية لـ v على I التي تنعدم عند الصفر.

(مشتق الدالة $x\to Tan(x)$ هي الدالة $x\to 1+Tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

21 - في كل ما يلي f دالة ناطقة معرفة على مجال معطى بين ان $f(x)$ تكتب على الشكل المعطى، ثم استنتج دالة اصلية للدالة f :

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$ ، $f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}$ ، $I=]-3,+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{3x+5}{4x+2}$ ، $f(x)=a+\dfrac{b}{4x+2}$ ، $I=]-\dfrac{1}{2},+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$ ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{5x^3+4x^2+2x+1}{(x+2)^2}$ ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+2)^2}$ ، $I=]-2,+\infty[$

22 - f و g و h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x+\cos^3 x$

$g(x)=\sin^4 x\,\cos^5 x$ و $h(x)=\cos^2 x\,\sin^4 x$ عين الدوال الأصلية للدوال المعطاة.

23 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^4 x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\sin(2x)$

2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

24 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{3x}\sin x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

2- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

25 - نضع $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{-3}{\sqrt{t^2+5}}\,dt$

1) احسب $F(0)$ ، ثم احسب $F'(x)$

2- ادرس تغيرات الدالة F ثم شكل جدول تغيراتها وعين إشارة $F(x)$

26 - نضع $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)\,dx}{1+2\sin x}$

احسب $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة I .

27 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=(2-x)e^x$

بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

28 - نضع $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}$ و $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

29 - نضع $f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dt$ مع $t\in[0,1[$

احسب التكامل $f(t)$ ثم عين نهاية $f(t)$ لما t يؤول إلى 1 بقيم صغرى .

30 - لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=x^2+2x$

احسب التكاملين $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}|f(x)|\,dx$ و $J=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(x^2+2|x|\right)dx$

31 - احسب قيمة I باستعمال التكامل بالتجزئة في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I=\displaystyle\int_1^2 t\,Lnt\,dt$ ، 2) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}(t-2)\cos t\,dt$

3) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{-t}\,dt$ ، 4) $I=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$

5) $I=\int_0^1 (2t^2-t+1)e^{t}\,dt$ ، 6) $I=\int_0^1 (3t+1)e^{t}\,dt$

32 - لتكن التكاملات K ، I ، J بحيث :

$I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$ و $J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$ ، $K=\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx$

1) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بين ان $K=\frac{e^{\pi}-1}{5}$

2) احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

3) بالتعبير عن $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ بدلالة $\cos(2x)$ أوجد باستعمال K قيمة I و J

33 - f دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+\sqrt{x^2-1})$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

2) نضع $J=\int_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{x^2-1}\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $I+J$ بدلالة J

ثم استنتج قيمة J

34 - من أجل كل x 0 نعتبر التكاملين :

$I_n=\int_0^{x}\sin^{2n}t\,dt$ و $J_n=\int_0^{x}(\sin^{2n}t-\cos^2 t)\,dt$ مع $n\in\mathbb{N}$

1) أوجد علاقة بين J_n ، I_n و I_{n+1}

2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب J_n بدلالة I_{n+1}

ثم استنتج علاقة تربط بين I_{n+1} و I_n

3) احسب I_0 ثم بين أنه يمكن حساب I_1 و J_0

35 - ليكن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y=\sin x$ مع $0\le x\le \pi$ و (Γ) المنحنى ذو المعادلة $y=ax^2+bx+c$

1) ارسم (γ) في معلم متعامد ومتجانس. نرمز بـ A إلى النقطة من (γ) بحيث المماس عندها يوازي $(x'x)$.

2) عين الأعداد a ، b ، c بحيث (Γ) يمر من المبدأ O ويقبل A كذروة له، ثم ارسم (Γ) على نفس المجال.

3) نقبل أن القطع المكافئ (Γ) يبقى فوق (γ) على المجال $[0,\pi]$ ، احسب مساحة الحيز المحصور بين هاذين المنحنيين.

36 - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=1+x-xe^{-x^2+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ طول الوحدة $2\,cm$.

1) تحقق ان (γ) يقبل النقطة $I(1,0)$ كمركز تناظر له.

2) برهن ان (γ) يقبل مستقيم مقارب (d) عند $(+\infty)$ ، ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (γ).

3) من اجل كل عدد حقيقي $\lambda\ge 0$ ، $S(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ) و (d) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$.

أ) عبر عن $S(\lambda)$ بدلالة λ.

ب) ما هي النهاية S للمساحة $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

ج) عين العدد الحقيقي λ_0 بحيث لما $\lambda\ge\lambda_0$ يكون $|S-S(\lambda)|\le 10^{-2}$.

37 - في معلم متعامد ومتجانس نعتبر القطع المكافئ (P) ذو المعادلة $y=16-x^2$ المرسوم على المجال $[-4,4]$. بتدوير P حول (oy) نحصل على مجسم دوراني $(\sum)$.

1) ما هي طبيعة مقطع من $(\sum)$ بمستو عمودي على (oy) ؟

2) عبر بدلالة y حيث $0\le y\le 16$ عن مساحة هذا القطع، ثم احسب مساحة $(\sum)$.

38 - (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=\int_0^{2}\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\,dt$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$ حيث $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

ب) استنتج أن $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\le U_n\le\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

ج) بين انه إذا كانت (U_n) تقبل نهاية ℓ فإن $3\le\ell\le\frac{7}{2}$

2) أ) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0,2]$ $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$

ثم استنتج قيمة I حيث $I=\int_0^{2}\frac{2t+3}{t+2}\,dt$

ب) بين انه من اجل كل $t\in[0,2]$ يكون $e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}\le 1$ ثم استنتج أن $I\le U_n\le e^{\frac{2}{n}}\times I$ ثم تحقق أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها ℓ.

39 - من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $I_n = \int_1^e (Ln\,x)^n\,dx$

1) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1,e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 \leq (Ln\,x)^n - (Ln\,x)^{n+1}$ ثم استنتج ان المتتالية (I_n) متناقصة

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_n \geq 0$ ثم استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة

2) أ) احسب I_1

ب) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_{n+1} = -e(n+1)I_n$ ثم استنتج القيم المضبوطة لـ I_2 ، I_3 و I_4

3) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :
$(n+1)I_n \leq e$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

ب) ما هي قيمة $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ ؟ ثم استنتج نهاية المتتالية (nI_n) .

40 - نريد حصر التكامل $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ بواسطة طريقة المستطيلات

1) ارسم التمثيل البياني للدالة $x \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجال $[0,3]$

2) نجزئ المجال $[0,3]$ إلى n مجال كل منها له نفس الطول حيث $n \geq 1$

أ) بين ان مجموع مساحات المستطيلات الكبرى يكتب على الشكل : $U_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\times 3\right)$

- بين أن مجموع مساحات المستطيلات الصغرى يكتب على الشكل:

$V_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\times 3\right)$ حيث (U_n) و (V_n) تعرف متتاليتين من أجل $n \geq 1$

ب) بين ان $U_n - V_n = \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^2+1}}\right)$

جـ) بين أن $U_n - V_n < \frac{7}{10n}$

د) استنتج قيمة n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $0 < U_n - V_n < 10^{-2}$
وهذا باستعمال السؤال (جـ)

و) أوجد الحصر للتكامل I الموافق للقيمة n_0

41 - من أجل كل x من $I =]0,+\infty[$ نضع $F(x) = \int_0^x Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة F

2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. تحقق أنه من أجل كل t من $[1,1+a]$ يكون $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ واستنتج ان $\frac{a}{a+1} \leq Ln(a+1) \leq a$

3) استنتج من السؤال (2) ان $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$

ثم $\frac{1}{2}Ln(2) - \frac{1}{2}Ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

4) نقبل أنه لما x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن نهاية $F(x)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ ℓ بين ان $\frac{1}{2}Ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n = \int_n^{n+1} Ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$

برهن ان $0 \leq U_n \leq Ln\left(1+e^{-2n}\right)$ ثم استنتج ان (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

6) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

- عبر عن S_n بدلالة n و F ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة ثم عين نهايتها .

42 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+x+1}$ و $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

1) بين أن المتتالية (I_n) معرفة جيدا ثم ادرس اتجاه تغير (I_n)

2) باستعمال الحصر على المجال $[0,1]$ للدالتين $U: x \to 1+x+x^2$ و $x \to \frac{1}{x}$

بين أن $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج تقارب المتتالية (I_n) .

43 - نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ التكامل I_n بـ $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1) احسب I_1 ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون :
$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون :
$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

3) برهن بالتراجع أن $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

4) أ) نضع من أجل كل $n \geq 1$ ، $U_n = \frac{2^n}{n!}$ احسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

5) أ) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية (I_n)

ب) تحقق أن $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$

44 - نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $I = [0,1]$ بـ $f(x) = -x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني على المجال I في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة هو $10\,cm$) وحدد المماس للمنحنى عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 1.

2) ارسم المنحنى المثل للدالة g ثم حدد المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) بين أن تكامل f و تكامل g على المجال I متساويين.

4) بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال $[0,1]$ تكافئ $(x-1)(x^2-3x+1) = 0$

5) استنتج أن المنحنيين لهما نقطة مشتركة فاصلتها α حيث $0 < \alpha < 1$

ب) احسب α ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين

6) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين.

45 - لتكن f_0 دالة معرفة على $I = [0,+\infty[$ بـ $f_0(x) = e^{-x}$ ومن أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α ، f_α دالة معرفة كما يلي :

$f_\alpha(0) = 0$ و $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ من أجل $x > 0$

(γ_α) المنحنى البياني للدالة f_α في معلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ طول الوحدة $(4\,cm)$

1) ادرس تغيرات الدالتين f_0 و f_1 وارسم (γ_0) ، (γ_1) في نفس المعلم.

2) نفرض أن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ ، ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند العدد $x_0 = 0$

3) ادرس تغيرات f_α

4) ليكن $\alpha > 0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ (γ_0) و (γ_α) على $]0,+\infty[$

5) ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث $0 < \alpha < \beta$ ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (γ_β) على $]0,+\infty[$.

6) برهن أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة عينها.

7) ارسم (γ_e) و $\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ في نفس المعلم السابق.

8) نفرض أن $\alpha > 0$ و لتكن g_α اقتصار الدالة f_α على المجال $]\alpha, +\infty[$.

برهن أن g_α تقبل دالة عكسية g_α^{-1} عين جدول تغيراتها، ثم ارسم بيانها (خذ $\alpha = \frac{1}{2}$).

9) نضع $\alpha = n$ حيث n عدد طبيعي ولتكن h_n دالة معرفة على I كما يلي :

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

أ) احسب $h_0(x)$ و $h_1(x)$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$

ب) بين أنه من أجل كل x من I يكون $h_n(x) = -x^n e^{-x} + n h_{n-1}(x)$

جـ) عين الأعداد الحقيقية a_0 ، a_1 ، ، a_n بحيث تكون الدالة K_n المعرفة بـ : $K_n(x) = e^{-x}(a_n x^n + \ldots\ldots + a_1 x + a_0)$ أصلية للدالة f_n على $]0,+\infty[$.

د) استنتج عبارة $h_n(x)$ بدلالة x و n .

هـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) = n!$

46 - f_α دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f_\alpha(x) = (x-\alpha)[1 - Ln(x-\alpha)] & , x > \alpha \\ f_\alpha(\alpha) = 0 \end{cases}$

وليكن (γ_α) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند $\alpha = x_0$.

2) ادرس حسب قيم α تغيرات f_α ثم ادرس وجود المستقيمات المقاربة لـ (γ_α) ارسم (γ_0) .

3) برهن ان جميع المنحنيات (γ_α) هي صورة (γ_0) بواسطة انسحاب يطلب تعيينه.

ثم ارسم (γ_1) و (γ_{-1}) في نفس المعلم.

4) احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ_0) والمستقيم ذا المعادلة $y = 2$ والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = e$ حيث $\lambda < e$ ثم احسب $\lim\limits_{\lambda \to 0} S(\lambda)$

47 - I) g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعبارة $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - Ln\left(x^2+1\right)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم حدد النهاية عند $(+\infty)$ واستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1, +\infty[$ وتحقق أن $2 > \alpha > \frac{7}{4}$

2) (Γ) المنحنى المثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس

أ) اكتب معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

ب) (T) يقطع المحور (ox) في نقطة فاصلتها x_0 ، احسب القيمة المضبوطة لـ x_0 .

V_1 و V_2 هما القيمتين التقريبية بتقريب 10^{-3} لـ x_0 .

باستعمال إشارة $g(V_1)$ و $g(V_2)$ استنتج حصرا لـ α بتقريب 10^{-3}

جـ) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{0\}$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{Ln(x^2+1)}{x} & , x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) برهن أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم ادرس اتجاه تغير f و احسب نهاية f عند $(+\infty)$

2) تحقق انه من أجل كل $x>-1$ يكون $Ln(1+x)\leq x$ ثم استنتج وضعية (γ) بالنسبة إلى المماس عند النقطة O ثم ارسم (γ)

III) F دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

1) r عدد حقيقي موجب تماما و ثابت، تحقق أن $F(r)$ و $F(-r)$ هما مساحتين لحيزين متقايسين ثم استنتج شفعية الدالة F . و حدد اتجاه تغير F على $]0,+\infty[$

2) استعمل وضعية (γ) بالنسبة إلى مماسه عند النقطة O للتحقق من أن $0\leq F(1)\leq\frac{1}{2}$

3) برهن انه من أجل كل $t\geq 1$ يكون $\frac{Ln(t^2)}{t}\leq\frac{Ln(t^2+1)}{t}\leq\frac{Ln(2t^2)}{t}$

4) لما $x\geq 1$ احسب $\int_1^x \frac{Ln(t)}{t}dt$ ثم استنتج نهاية $F(x)$ و $\frac{F(x)}{x}$ عند $(+\infty)$

5) اعط تصور عن رسم المنحنى الممثل للدالة F (خذ بعين الاعتبار $F(1)\approx 0,4$)

تم هذا الكتاب بعون الله تعالى



كلمة الناشر

كنا طلبة ... و كانت الكتب العلمية تأتينا من الخارج كنا نتسابق لشرائها من المكتبات بلهفة و شوق ... و أشد لهفتنا كانت على الكتب الفيزياء و الرياضيات التي تحمل أصعب التمارين والمسائل ... و كنا نبحث عن الجديد ... فأحببنا الكتاب و أحببنا الجديد.

لهذا كانت سلسلة الجديد في " ... " هي الأولى في مجموعات الكتب التي نأمل أن نصدرها للتعليم المتوسط و الثانوي والجامعي و قد أصدرنا البعض منها في الفيزياء و الكيمياء والعلوم و الرياضيات و الأدب ، و إنها ستكون " إنشاء الله " من أبرز الكتب في الساحة العلمية حتى على مستوى الوطن العربي .

ومع أن هذا الكلام حق ، فإنني أحمد الله سبحانه و تعالى أن يصادف خروج هذه السلسلة انبثاق فجر الآمال في أن تسترد الجزائر حياتها الغالية — حياة الشهداء — و أن تهتدي بهدي نبينا الأعظم صلى الله عليه و سلم و تستعيد سيرة أبي بكر وعمر ... آمين .

كريطوس بوجمعة

رقم الإيداع القانوني: 2007-1193 ردمك: 978-9961-894-50-7